01. باك 2015 الدورة العادية

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$.

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 2 cm) .

I. ..

01. نبين أن : $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$ (D_f مجموعة تعريف الدالة f) . ... (0.5 ن)

لدينا : $x\in D_f \Leftrightarrow x>0$ و $x(1-\ln x)\neq 0$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x\neq 0$ و $1-\ln x\neq 0$

$\Leftrightarrow x>0$ و $\ln x\neq \ln e$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x\neq e$

$\Leftrightarrow x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$

02..

أ- نحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} f(x)$ و أول هندسيا النتيجتين المتوصل إليهما . ... (0.75 ن)

- $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}}\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} 1-\ln x=0^-$
- $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}}\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} 1-\ln x=0^+$
- تأويل هندسيا للنتيجتين المتوصل إليهما : منحنى f يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x=e$.

ب- نحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا بجوار $+\infty$ يتم تحديده. .... (0.5 ن)

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=0$. لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} 1-\ln x=-\infty$
- نستنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا أفقي بجوار $+\infty$ هو المستقيم الذي معادلته $y=0$

ج- نبين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة (لحساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$ لاحظ أن $x(1-\ln x)=x-x\ln x$ . .. (0.5 ن)

- لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1}{x-x\ln x}=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x=0$ و $-\ln x>0$
- تأويل هندسيا النتيجة : المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x=0$.

03...

أ- نبين أن : $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل x من D_f . ... (0.75 ن)

- الدالة العددية f هي قابلة للاشتقاق على D_f (لأنها جداء و مقلوب دوال قابلة للاشتقاق و غير منعدمة على D_f)
- لدينا : $f'(x)=\left[\dfrac{1}{x(1-\ln x)}\right]'=\dfrac{-(x(1-\ln x))'}{(x(1-\ln x))^2}=-\dfrac{1-\ln x+\cancel{x}\times\left(-\dfrac{1}{\cancel{x}}\right)}{(x(1-\ln x))^2}=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$

خلاصة : $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل x من D_f.

ب- نبين أن : الدالة f تناقصية على المجال $]0;1]$ و تزايدية على كل من المجالين $[1;e[$ و $]e;+\infty[$ . ... (1 ن)

- ندرس إشارة f' : إشارة f' هي إشارة $\ln x$ على D_f
- على المجال $]0;1]$ لدينا $\ln x\le 0$ و منه : الدالة f تناقصية على المجال $]0;1]$.
- على كل من المجالين $[1;e[$ و $]e;+\infty[$ لدينا $\ln x\ge 0$ و منه : الدالة f تزايدية على كل من المجالين $[1;e[$ و $]e;+\infty[$

ج- نضع جدول تغيرات الدالة f على D_f . ... (0.25 ن)

x	0		1		e		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f	‖	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

.II ..

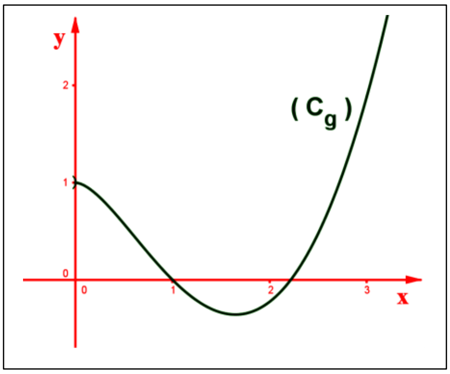
لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$.

و ليكن $(\mathcal{C}_g)$ المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم (أنظر الشكل) .

.01 ..

أ- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة (E) التالية : $g(x)=0$, $x\in]0;+\infty[$ .. (0.5 ن)

أي نحدد عدد نقط تقاطع المنحنى و محور الأفاصيل و بالتالي المعادلة لها حلين



ب- نعطي جدول القيم التالية :

x	$2,1$	$2,2$	$2,3$	$2,4$
$g(x)$	$-0,14$	$-0,02$	$0,12$	$0,28$

بين أن : المعادلة (E) تقبل حلا α حيث : $2,2<\alpha<2,3$ . ... (0.5 ن)

- مبيانيا الدالة g متصلة على المجال $[2,2;2,3]$
- من خلال الجدول $g(2,2)\times g(2,3)=-0,02\times 0,12<0$
- إذن حسب مبرهنة المتوسط يوجد α من المجال $]2,2;2,3[$ حيث $g(\alpha)=0$

خلاصة : المعادلة (E) تقبل حلا α حيث : $2,2<\alpha<2,3$

.02 ..

أ- نتحقق من أن : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل x من D_f. .... (0.25 ن)

لدينا : $\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)} = \dfrac{1-x^2(1-\ln x)}{x(1-\ln x)} = \dfrac{1}{x(1-\ln x)} - x = f(x)-x$

خلاصة : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل x من D_f.

ب- نبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 و α . ... (0.5 ن)

ندرس تقاطع المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و لهذا نحل المعادلة : $x\in D_f : f(x)=x$

أو أيضا : $x\in D_f : f(x)-x=0$ وهذا يكافئ $x\in D_f : \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}=0$ أي $x\in D_f$, $g(x)=0$

مبيانيا هناك حلين و حسب ما سبق $g(\alpha)=0$ و لدينا $g(1)=0$ (بالحساب أو مبيانيا)

خلاصة : المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 و α

ج- نحدد انطلاقا من $(\mathcal{C}_g)$ ؛ إشارة الدالة g على المجال $[1;\alpha]$ و نبين أن $f(x)-x\le 0$ لكل x من $[1;\alpha]$ .... (0.5 ن)

- إشارة الدالة g على المجال $[1;\alpha]$

على المجال $]1;\alpha[$ $g(x)<0$ بالنسبة ل $g(1)=0$ و $g(\alpha)=0$ و بصفة عامة على المجال $[1;\alpha]$ $g(x)\le 0$

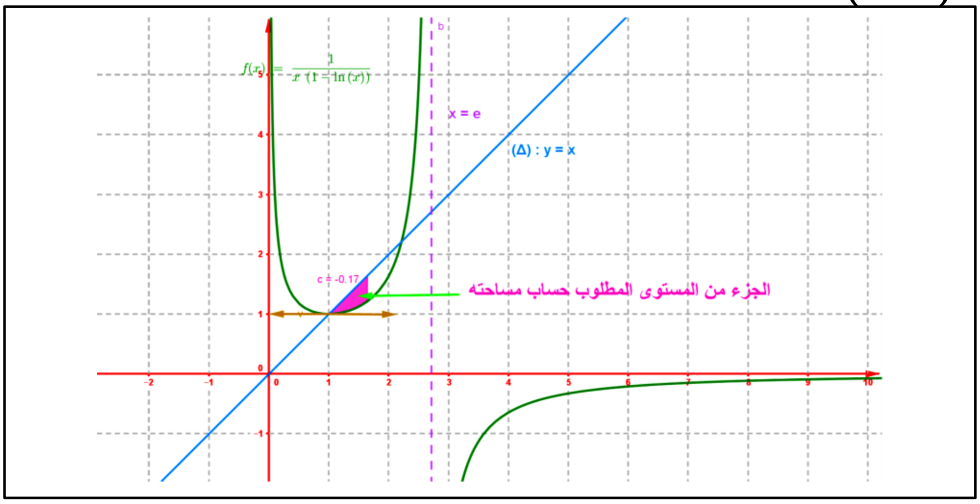
- نبين أن $f(x)-x\le 0$ لكل x من $[1;\alpha]$.

على المجال $[1;\alpha]$: $g(x)\le 0$ و $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}\ge 1>0$ حسب جدول تغيرات f على المجال $[1;e[$ و

$[1;\alpha]\subset[1;e[$ و منه : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}\le 0$ لكل x من D_f.

خلاصة : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}\le 0$ لكل x من D_f.

03. ننشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (Δ) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ . ... (1.25 ن)



..04

أ- نبين أن : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \ln 2$ (لاحظ أن : $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ لكل x من D_f . ... (0.75 ن)

لدينا : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{x}}{(1-\ln x)}dx = [1-\ln x]_1^{\sqrt{e}} = \ln 2$.

خلاصة : $\boxed{\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \ln 2}$

ب- نحسب ، ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=\sqrt{e}$ . ... (0.75 ن)

المساحة A هي :
$$A = 4\times\int_1^{\sqrt{e}}(x-f(x))dx = -4\times\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{x(1-\ln x)}-x\right)dx = -4\left[\ln(|1-\ln x|)-\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}$$
$$= -4\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\times e+\frac{1}{2}\right) = 4\ln 2+2e\ cm^2$$

.III ...

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

.01 نبين بالترجع أن : $1 \le u_n \le \alpha$ لكل n من $\mathbb{N}$ . ... (0.5 ن)

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$
  لدينا : $1 \le u_0 = 2 \le \alpha$ (مع $2,2<\alpha<2,3$)
- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى الرتبة n : أي $1 \le u_n \le \alpha$.
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$: أي نبين أن : $1 \le u_{n+1} \le \alpha$

حسب معطيات الترجع لدينا : (لأن f تزايدية على $[1;\alpha]$) $1 \le u_n \le \alpha \Rightarrow f(1) \le f(u_n) \le f(\alpha)$
$$\Rightarrow 1 \le u_{n+1} \le \alpha \ ; \ (f(\alpha)-\alpha = 0)$$

و منه : العلاقة صحيحة ل $n+1$

خلاصة : $\boxed{1 \le u_n \le \alpha}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

.02 نبين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال II (2 (ج -) .... (0.5 ن)

نبين أن : $u_{n+1}-u_n \le 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

نضع $x=u_n$ و نعلم أن $1 \le u_n \le \alpha$ إذن $1 \le x \le \alpha$ و لدينا : $f(x)-x \le 0$ لكل x من $[1;\alpha]$

من جهة أخرى :
$$u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n$$
$$= f(x)-x \le 0$$

و منه : $u_{n+1}-u_n \le 0$

خلاصة : المتتالية (u_n) تناقصية .

03. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها . ... (0.75 ن)

- لدينا المتتالية (u_n) تناقصية و مصغورة لأن $1 \le u_n \le \alpha$ و منه : المتتالية (u_n) متقاربة حسب خاصية .
- المتتالية تكتب على شكل $u_{n+1} = f(u_n)$ و الدالة f متصلة على $I = [1;\alpha]$ و $f(I) \subset I = [1;\alpha]$ و : المتتالية (u_n) متقاربة إذن نهايتها ℓ هي حل للمعادلة $f(x) = x \; ; \; x \in [1;\alpha]$
- أي $f(x) - x = 0 \; ; \; x \in [1;\alpha]$ و هذه المعادلة لها حلين هما 1 و α و بما أن المتتالية (u_n) تناقصية إذن $u_0 \ge u_1 \ge u_2 .... \ge u_n$ و منه $u_0 = 2 \ge u_n$ و منه $u_n \le 2$ الحل هو $\ell = 1$ و ليس α لأن $2,2 < \alpha < 2,3$
- خلاصة : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

02. باك 2014 الدورة العادية

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $D =]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)$.

01. نبين أن : $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ و استنتج أن الدالة g تزايدية على $]0;+\infty[$. (0.5 ن)

- لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ (مجموع دوال قابلة للاشتقاق) : $g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)\right)' = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$

  ومنه : $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$.
- لدينا : $0 < g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ لأن x من $]0;+\infty[$ ومنه الدالة g تزايدية على $]0;+\infty[$.

02. تحقق أن $g(1) = 0$ ثم استنتج أن $g(x) \le 0$ لكل x من $]0;1]$ و $g(x) \ge 0$ لكل x من $[1;+\infty[$. (0.75 ن)

- $g(1) = 1 - \frac{1}{1^2} + \ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$ و منه : $g(1) = 0$.
- لدينا لكل x من $]0;1]$ إذن $x \le 1$ بما أن g تزايدية إذن $g(x) \le g(1)$ أي $g(x) \le 0$.
- لدينا لكل x من $[1;+\infty[$ إذن $x \ge 1$ بما أن g تزايدية إذن $g(x) \ge g(1)$ أي $g(x) \ge 0$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = (1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}$. ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 1 cm) .

01. نبين أن : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة . (0.5 ن)

- لدينا : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
- تأويل الهندسي للنتيجة : المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x = 0$.

02. أ- نحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (0.25 ن)

- لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(x)=\lim_{x\to+\infty}(1+\ln(x))^2+\frac{1}{x^2}=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

خلاصة : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب – نبين أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln(x))^2}{x}=0$ (يمكنك وضع $t=\sqrt{x}$) ثم بين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. (1 ن)

- نضع $t=\sqrt{x}$ ومنه $t^2=x$ و $x\to+\infty$ فإن $t\to+\infty$ و بالتالي :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln(x))^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(1+\ln(t^2))^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1+2\ln(t)}{t}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+2\frac{\ln(t)}{t}\right)^2=0$$

لأن $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}=0$ و $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$.

خلاصة : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln(x))^2}{x}=0$

- نبين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln(x))^2+\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln(x))^2}{x}+\frac{1}{x^3}=0+0=0$

ج – نحدد الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$. (0.25 ن)

- بما أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ إذن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

03. أ- نبين أن : $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن f تناقصية على $]0;1]$ و تزايدية على $[1;+\infty[$. (1.5 ن)

- نبين أن : $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

لدينا :

$$f'(x)=\left((1+\ln(x))^2+\frac{1}{x^2}\right)'=2(1+\ln(x))'(1+\ln(x))-\frac{2}{x^3}=\frac{2}{x}(1+\ln(x))-\frac{2}{x^3}=\frac{2}{x}\left(1+\ln(x)-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2g(x)}{x}$$

خلاصة : $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

- نستنتج أن f تناقصية على $]0;1]$ و تزايدية على $[1;+\infty[$.

إشارة ' f هي إشارة g حسب ما سبق السؤال 2 لدينا : $g(x)\le 0$ لكل x من $]0;1]$ و $g(x)\ge 0$ لكل x من $[1;+\infty[$ و منه f تناقصية على $]0;1]$ و تزايدية على $[1;+\infty[$.

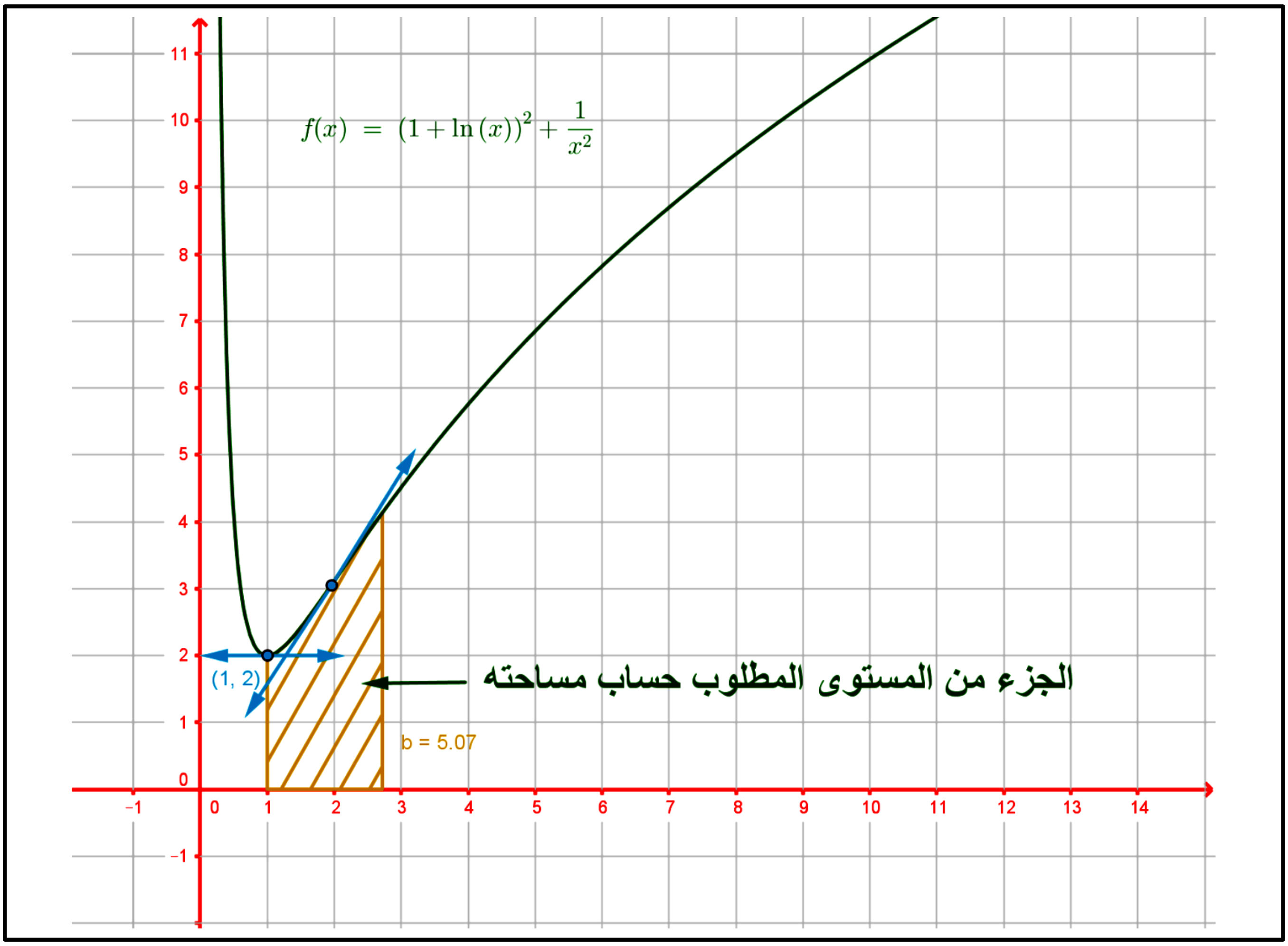
خلاصة : f تناقصية على $]0;1]$ و تزايدية على $[1;+\infty[$.

ب- نضع جدول لتغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن $f(x)\ge 0$ لكل x من $]0;+\infty[$. (1 ن)

- جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		$+\infty$
f '	||	-	0	+	
f	||	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

.04 أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة تحديدها غير مطلوب) . (0.75 ن)



.05 نعتبر التكاملين I و J التاليين $I=\int_1^e (1+\ln(x))dx$ و $J=\int_1^e (1+\ln(x))^2 dx$.

أ – نبين أن : $H : x \to x\ln(x)$ دالة أصلية للدالة $h : x \to 1+\ln(x)$ على $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن $I=e$. (0.5 ن)

- لدينا : $H'(x)=(x\ln(x))'=1\times\ln x + x\times\frac{1}{x}=1+\ln x$

إذن : $H : x \to x\ln(x)$ دالة أصلية للدالة $h : x \to 1+\ln(x)$ على $]0;+\infty[$

- لدينا: $I=\int_1^e (1+\ln(x))dx=[H(x)]_1^e=[x\ln(x)]_1^e=e\ln e - 1\times\ln 1 = e$ ومنه : $I=\int_1^e (1+\ln(x))dx=e$

ب - باستعمال المكاملة بالأجزاء نبين أن : $J = 2e - 1$. (0.5 ن)

نضع :

$$u(x) = (1+\ln(x))^2 \qquad u'(x) = 2\times\frac{1}{x}\times(1+\ln(x))$$

$$v'(x) = 1 \qquad v(x) = x$$

$$J = \int_1^e (1+\ln(x))^2\,dx$$

ومنه :

$$= \left[x(1+\ln(x))^2\right]_1^e - \int_1^e \cancel{x}\times 2\times\frac{1}{\cancel{x}}\times(1+\ln(x))\,dx$$

$$= e(1+1)^2 - 1(1+0)^2 - 2I$$

$$= 4e - 1 - 2e$$

$$= 2e - 1$$

خلاصة : $\boxed{J = 2e - 1}$

ج – نحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$. (0.5 ن)

$\mathscr{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$ هي :

$$\mathscr{A} = \int_1^e \left((1+\ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \int_1^e (1+\ln(x))^2\,dx + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= 2e - 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$= 2e - 1 - \left(\frac{1}{e} - 1\right) = 2e - \frac{1}{e}$$

خلاصة : $\mathscr{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$ هي : $\mathscr{A} = 2e - \frac{1}{e}\ (u.a)$ (معبر عنها بوحدة المساحة)

03. باك 2013 الدورة الاستدراكية

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $D =]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^2 - x - \ln(x)$.

01. أ – نتحقق أن : $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$. (0.25 ن)

لدينا : $(2x+1)(x-1) = 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 - x - 1$.

خلاصة : $\boxed{2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)}$

ب - نبين أن $g'(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ و استنتج أن الدالة g تناقصية على $]0;1]$ تزايدية على $[1;+\infty[$. (1ن)

- لدينا : $g'(x)=\left(x^2-x-\ln(x)\right)'=2x-1-\frac{1}{x}=2x^2-x-1$ و منه : $g'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}$
- $g'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ لأن $2x+1$ موجبة على $]0;+\infty[$

ومنه : $x-1$ سالبة على $]0;1]$ إذن الدالة g تناقصية على $]0;1]$ ؛ $x-1$ موجبة على $[1;+\infty[$ إذن الدالة g تزايدية على $[1;+\infty[$.

خلاصة : $g'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ و الدالة g تناقصية على $]0;1]$ تزايدية على $[1;+\infty[$.

02. بين أن : $g(x)\geq 0$ لكل x من $]0;+\infty[$ (لاحظ أن $g(1)=0$) . (0.5 ن)

بما أن : الدالة g تناقصية على $]0;1]$ تزايدية على $[1;+\infty[$ إذن الدالة g تقبل قيم دنيا في النقطة التي أفصولها $x_0=1$ و منه لكل x من $]0;+\infty[$ فإن $g(x)\geq g(0)$ أي $g(x)\geq 0$ لأن $g(1)=0$ ومنه : $g(x)\geq 0$ لكل x من $]0;+\infty[$ (يمكنك وضع جدول تغيرات الدالة g)

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2-1-\left(\ln(x)\right)^2$ و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1 cm) .

01. أ - نبين أن : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ و أول هندسيا النتيجة . (0.5 ن)

- لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+}x^2-1=-1$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ و منه : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^2-1-\left(\ln(x)\right)^2=-\infty$.
- نؤول هندسيا النتيجة : المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x=0$.

ب - نبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ (لاحظ أن $f(x)=x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\right)$) . (0.5 ن)

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-1-\left(\ln(x)\right)^2=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)-1=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.
- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\right)}{\cancel{x}}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

ج – استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه . (0.25 ن)

- بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

02. أ- نبين أن : $f'(x)=2\left(\frac{x^2-\ln(x)}{x}\right)$ لكل x من $]0;+\infty[$. (1 ن)

لدينا : $f'(x)=\left(x^2-1-(\ln(x))^2\right)'=2x-2(\ln x)'\ln x=2x-2\times\frac{1}{x}\times\ln x=2\left(\frac{x^2-\ln(x)}{x}\right)$

خلاصة : $f'(x)=2\left(\frac{x^2-\ln(x)}{x}\right)$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ب- نتحقق أن : $\frac{x^2-\ln(x)}{x}=\frac{g(x)}{x}+1$ لكل x من $]0;+\infty[$ و استنتج أن f تزايدية على $]0;+\infty[$. (0.75 ن)

- لدينا : $\frac{g(x)}{x}+1=\frac{x^2-x-\ln(x)}{x}+1=\frac{x^2-\cancel{x}-\ln(x)+\cancel{x}}{x}=\frac{x^2-\ln(x)}{x}$ ومنه : $\frac{g(x)}{x}+1=\frac{x^2-\ln(x)}{x}$
- ومنه نستنتج أن : $f'(x)=2\left(\frac{x^2-\ln(x)}{x}\right)=2\left(\frac{g(x)}{x}+1\right)\geq 0$ (لأن $g(x)\geq 0$ لكل x من $]0;+\infty[$) و بالتالي f تزايدية على $]0;+\infty[$.

خلاصة : $\frac{x^2-\ln(x)}{x}=\frac{g(x)}{x}+1$ لكل x من $]0;+\infty[$ و f تزايدية على $]0;+\infty[$.

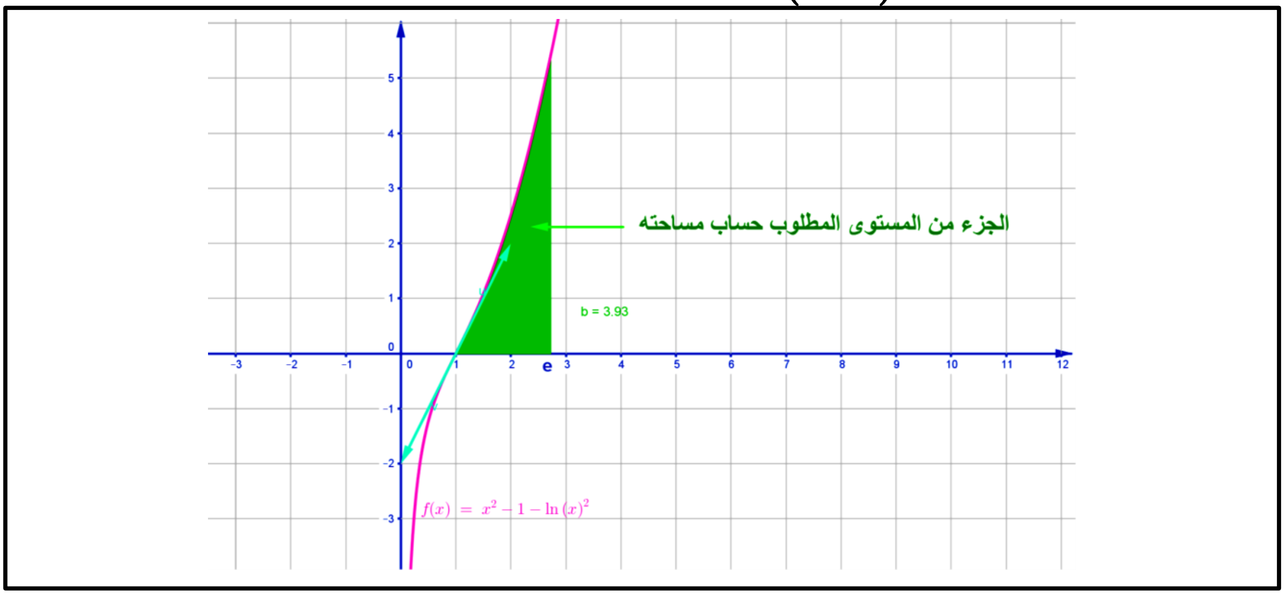
03. أ- نبين أن : $y=2x-2$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة $A(1;0)$. (0.5 ن)

- معادلة المماس في النقطة $A(1;0)$ هي :

$$y=(x-1)f'(1)+f(1)=(x-1)\times 2+0=2x-2$$

خلاصة : $y=2x-2$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة $A(1;0)$.

ب- ننشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة هي $A(1;0)$). . (1 ن)



04. أ - لنتحقق أن الدالة $x\to x(\ln(x)-1)$ دالة أصلية للدالة $x\to\ln(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ ثم بين أن :

$I=\int_1^e \ln(x)dx=1$. (0.75 ن)

- لدينا : الدالة $x\to x(\ln(x)-1)$ قابلة الاشتقاق على $]0;+\infty[$ مع دالتها المشتقة هي :

$$\left(x\left(\ln(x)-1\right)\right)'=1\times\left(\ln(x)-1\right)+x\left(\ln(x)-1\right)'=\ln x-1+\cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}}=\ln x$$

خلاصة : الدالة $x\to x\left(\ln(x)-1\right)$ دالة أصلية للدالة $x\to\ln(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

- لدينا : $I=\int_1^e\ln(x)dx=\left[x\left(\ln(x)-1\right)\right]_1^e=e(1-1)-1-1\times(0-1)+1=1$.

خلاصة : $I=\int_1^e\ln(x)dx=1$

ب - باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J=\int_1^e\left(\ln(x)\right)^2dx=e-2$. (0.5 ن)

نضع :

$$u(x)=\left(\ln(x)\right)^2 \qquad u'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x$$

$$v'(x)=1 \qquad v(x)=x$$

ومنه :

$$\begin{aligned}J&=\int_1^e\left(\ln(x)\right)^2dx\\&=\left[x\left(\ln(x)\right)^2\right]_1^e-\int_1^e\cancel{x}\times2\times\frac{1}{\cancel{x}}\times\ln x\,dx\\&=e(1)^2-1(0)^2-2I\\&=e-2\\&=e-2\end{aligned}$$

خلاصة : $J=\int_1^e\left(\ln(x)\right)^2dx=e-2$

ج – نبين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=e$ هي $\frac{1}{3}\left(e^3-6e+8\right)\ cm^2$. (0.5 ن)

$\mathscr{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$ هي :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}&=\int_1^e\left(x^2-1-\left(\ln(x)\right)^2\right)dx=\int_1^e\left(x^2-1\right)dx-\int_1^e\left(\ln(x)\right)^2dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^e-e+2 \qquad ;\ \left(\int_1^e\left(\ln(x)\right)^2dx=J=e-2\right)\\&=\left(\frac{e^3}{3}-e-\frac{1}{3}+1\right)-e+2\\&=\frac{e^3}{3}-2e+\frac{8}{3}=\frac{1}{3}\left(e^3-6e+8\right)\end{aligned}$$

خلاصة : $\mathscr{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $\left(\mathcal{C}_f\right)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$ هي : $\mathscr{A}=\frac{1}{3}\left(e^3-6e+8\right)\ cm^2$ (معبر عنها بوحدة المساحة هي cm^2)