الهندسة الفضائية

1) تذكير :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

❖ لتكن $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$

إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right)$

المسافة AB : $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$

إحداثيات I منتصف القطعة $\left[AB\right]$: $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2},\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

❖ لتكن $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ و $\vec{v}\left(x',y',z'\right)$

منظم متجهة : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ و $\|\vec{v}\|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$

الجداء السلمي: $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

خاصية : $\vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

❖ **تمثيل بارامتري لمستقيم:**

ليكن $\left(D\right)$ المستقيم المار من النقطة $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و موجه بالمتجهة $\vec{u}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$

$M\left(x,y,z\right)\in\left(D\right) \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=t\vec{u} \quad \left(t\in\mathbb{R}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x_A+t\alpha \\ y=y_A+t\beta \\ z=z_A+t\gamma \end{cases} \quad \left(t\in\mathbb{R}\right)$$

النظمة الأخيرة تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم $\left(D\right)$

❖ **معادلة ديكارتية لمستوى:**

ليكن $\left(P\right)$ المستوى المار من النقطة A و المتجهة $\vec{n}\left(a,b,c\right)$ منظمية للمستوى $\left(P\right)$

$M\left(x,y,z\right)\in\left(P\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$

خاصية :

إذا كان $\left(P\right)$ مستوى معادلته $ax+by+cz+d=0$ فإن $\vec{n}\left(a,b,c\right)$ هي متجهة منظمية للمستوى $\left(P\right)$.

❖ **مسافة نقطة عن مستوى :**

ليكن (P) **مستوى معادلته** $ax+by+cz+d=0$ **و** $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ **نقطة من الفضاء**

$$d(\Omega,(P))=\frac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

2) الفلكة

أ. تعريف :

لتكن Ω **نقطة و** r **عددا حقيقيا موجبا قطعا**
مجموعة النقط M **من الفضاء التي تحقق** $\Omega M=r$ **تسمى الفلكة التي مركزها** Ω **و شعاعها** r **و نرمز لها بالرمز :** $S(\Omega,r)$

ب. معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بمركزها و شعاعها :

معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ **و شعاعها** r **هي :**

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

ج . معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بأحد أقطارها :

لتكن (S) **فلكة أحد أقطارها** $[AB]$ **و** M **نقطة من ألفضاء**

$$M\in(S)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$$

د . دراسة E مجموعة النقط التي تحقق: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ تكافئ $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$

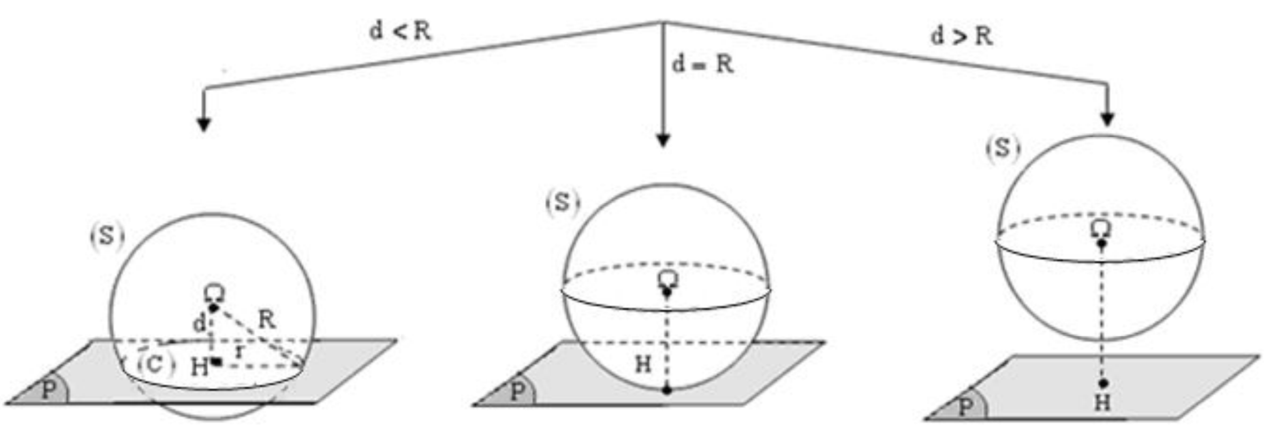
هناك ثلاث حالات :

- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}<0$: E **مجموعة فارغة**
- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}=0$: E **هي النقطة الأحادية** $\left\{\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)\right\}$
- $\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}>0$: E **هي الفلكة التي مركزها** $\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)$ **وشعاعها** $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$

3) الأوضاع النسبية لفلكة و مستوى

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R . نضع $d=d(\Omega,(P))$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)

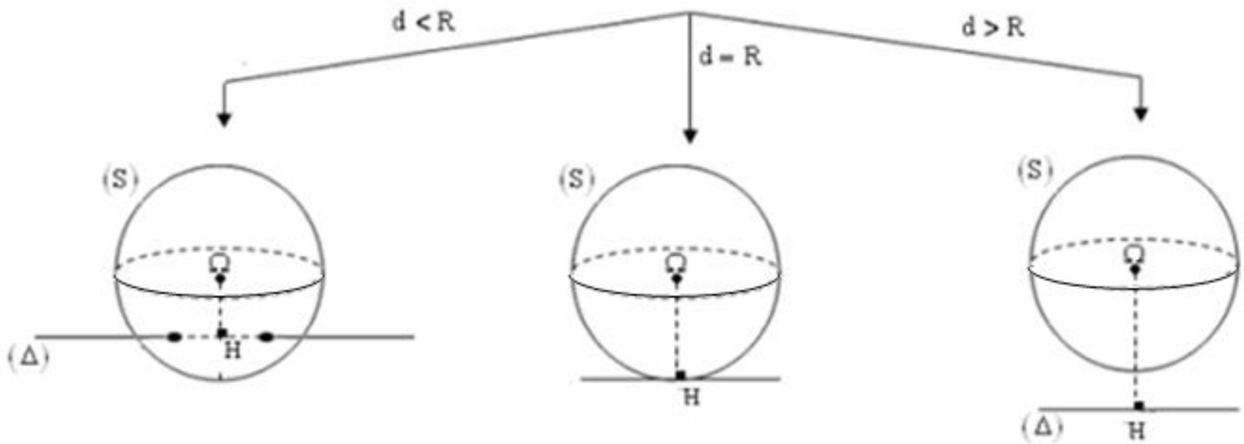


المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) مركزها H و شعاعها $r=\sqrt{R^2-d^2}$		**المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة H**		**المستوى (P) لا يقطع الفلكة (S)**

4) الأوضاع النسبية لفلكة و مستقيم :

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R . نضع $d = d(\Omega, (\Delta))$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (Δ)



المستقيم (Δ) و الفلكة (S) لا يتقاطعان		المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة H		المستقيم (Δ) يخترق الفلكة (S) في نقطتين مختلفتين

5) الجداء المتجهي :

أ. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي :

إذا كان $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

فإن $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{k}$

ب. استقامية متجهتين :

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ يكافئ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

ج. استقامية ثلاث نقط :

A و B و C مستقيمية يكافئ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

د. معادلة ديكارتية لمستوى :

إذا كان $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ فإن النقط A و B و C غير مستقيمية وبالتالي فهي تحدد لنا مستوى (ABC)

و المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ هي متجهة منظمية للمستوى (ABC)

و لدينا : $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$

و منه نستنتج معادلة المستوى (ABC)

ملاحظة : كل مستقيم عمودي على (ABC) يكون موجها بالمتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

ه. مساحة مثلث - مساحة متوازي أضلاع:

مساحة مثلث ABC هي : $S_{ABC} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{2}$

مساحة متوازي الأضلاع هي : $S_{ABCD} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$

و. مسافة نقطة عن مستقيم :

مسافة نقطة Ω عن مستقيم (D) مار من نقطة A و موجه بمتجهة $\vec{u}$ هي : $d\left(\Omega,(D)\right) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

ز. توازي و تعامد مستويين :

نعتبر مستويين $(P): ax + by + cz + d = 0$ و $(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$\vec{n}(a,b,c)$ و $\vec{n}'(a',b',c')$ **هما متجهتان منظميتان للمستويان** (P) و (P')

$(P)//(P')$ **يكافئ** $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$

$(P) \perp (P')$ **يكافئ** $\vec{n}.\vec{n}' = \vec{0}$

ك. تقاطع مستويين :

إذا كان (P) و (P') متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{n} \wedge \vec{n}'$