

تصحيح تمرين 1 :

1- لنبين ان: $x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2; 0]$
لدينا $x^3 + x + 1$ متصلة على \mathbb{R} وبالتحديد على مجال $[-2; 0]$
(لانها دالة حدودية)

وكذلك الدالة $x^3 + x + 1$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وبالتحديد على مجال $[-2; 0]$
(لانها دالة حدودية)
وبالتالي : $f'(x) = (x^3 + x + 1)' = 3x^2 + 1 \geq 0$ (لان $x^2 \geq 0$)

وبالتالي f دالة تزايدية على $[-2; 0]$
لنحسب $f(0) \times f(-2)$

$f(0) = 0^3 + 0 + 1 = 1$
و $f(-2) = (-2)^3 - 2 + 1 = -9$
وبالتالي : $f(0) \times f(-2) = 1 \times -9 = -9 < 0$
ومنه فان المعادلة $f(x) = x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حل وحيد في المجال $[-2; 0]$

2- لنحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 - x} + 3x \quad (1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} + 3x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} + 3\right) = -\infty$$

$$\text{(لان } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x \sqrt[3]{\frac{1}{x}}}{x} \quad (2)$$

$$\text{(لان } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0 \text{)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \sqrt[3]{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}\right) = +\infty \quad (3)$$

$$\text{(لان } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0 \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x+22}-3}{2x-10} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+22-27}{2(x-5)(\sqrt[3]{x+22+3}\sqrt[3]{x+22+3^2})} = \frac{1}{54} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x} - 1 = 0 \quad (5)$$

3- لنحل المترابحة التالية : $\sqrt[5]{2x-1} \geq 2 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 32 \Leftrightarrow x \geq \frac{33}{2}$

$$S = \left[\frac{33}{2}; +\infty\right[\text{ وبالتالي}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$$

وبالتالي f قابلة للاشتقاق في 0 ومنه فان (C_f) يقبل مماسا معادلته :

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{3}x$$

4- لنحسب $f'(x)$:

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x+1} - 1)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$\forall x \in]-1; +\infty[; f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

5- جدول تغيرات الدالة f :

$$\forall x \in]-1; +\infty[; f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} > 0$$

لدينا f تزايدية قطعاً على $]-1; +\infty[$
ومنه فان f تزايدية قطعاً على $]-1; +\infty[$
- جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)		\rightarrow

6- لدينا f متصلة وتزايدية قطعاً على $]-1; +\infty[$
ومنه فان f تقبل دالة عكسية من $]-1; +\infty[$ نحو المجال J

$$\text{تحديد } J: J = f(]-1; +\infty[) = [f(-1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

$$\text{لدينا } f(-1) = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

وبالتالي فان : $J =]-1; +\infty[$

$$7- \text{ لنحسب } f(1) = \sqrt[3]{2} - 1$$

$$\text{لنحسب } f'(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+1)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

بما ان f قابلة للاشتقاق في 1 و $f'(1) \neq 0$ ، وبالتالي f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(1)$

$$\text{وبالتالي } (f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}} = 3\sqrt[3]{4}$$

8- لنحدد $f^{-1}(x)$:

ليكن x و y عنصرين من المجال $]-1; +\infty[$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{y+1} - 1 = x$$

$$\Leftrightarrow y + 1 = (x + 1)^3 \Leftrightarrow y = (x + 1)^3 - 1$$

$$\forall x \in]-1; +\infty[; f^{-1}(x) = (x + 1)^3 - 1 \text{ وبالتالي}$$

التمرين 3 :

1- لدينا x_1 و x_2 و ... و x_n اعداد حقيقية من المجال $[a; b]$

$$\text{و } f([a; b]) = [m; M]$$

فان $m \leq f(x_i) \leq M$ لكل i من $\{1, 2; \dots; n\}$

$$m + \dots + m = nm \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M + \dots + M = nM$$

نمرة n

$$\text{ومنه } m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M$$

$$2- \text{ نضع ان } g(x) = f(x) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

بما ان f متصلة على المجال $[a; b]$ فان g متصلة على $[a; b]$

(عبارة عن مجموع دالتين متصلتين)

التمرين الثاني :

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

$$1- D_f = [-1; +\infty[\text{ وبالتالي } x \in D_f \Leftrightarrow x+1 \geq 0$$

- الدالة $x \mapsto -1$ متصلة على \mathbb{R} وبالخصوص على $[-1; +\infty[$ (لانها دالة حدودية)

$$- \text{ الدالة } x \mapsto \sqrt[3]{x+1} \text{ متصلة على } [-1; +\infty[$$

وبالتالي f متصلة على $[-1; +\infty[$ (عبارة عن مجموع دالتين متصلتين)

$$2- \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} - 1 = +\infty$$

$$\text{(لان } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} = +\infty \text{)}$$

3- لندرس قابلية الاشتقاق f في 0 : $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$$

لنبين ان $g(a) \times g(b) < 0$:

لنحسب $g(a)$:

$$g(a) = f(a) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = m - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) < 0$$

لان $m < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ حسب سؤال (1)

لنحسب $g(b)$:

$$g(b) = f(b) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = M - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) > 0$$

لان $m > \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ حسب سؤال (1)

ومنه $g(a) \times g(b) < 0$

وبالتالي حسب مبرهنة القيم الوسطية فان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على الاقل حل c في $[a; b]$

$$g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = 0$$

ومنه نستنتج ان $\exists c \in [a; b]; f(c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$