تصحيح الفرض رقم 1

التمرين 01 "احسب النهايات التالية"

① لدينا $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+1}$

ومنه $= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(x^2-x+1)} = -\frac{5}{3}$

وعليه $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+1} = \frac{-5}{3}$

② لدينا $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1-2\sqrt{x-1}}{x-1}$

ومنه $= \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} - \frac{2\sqrt{x-1}}{(x-1)}$

وعليه $= \lim_{x\to 1^+} (x+1) - \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x-1})}$

نعلم أن $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{x-1} = 0^+$

ومنه $\lim_{x\to 1^+} \frac{-2}{\sqrt{x-1}} = -\infty$

ولدينا أيضا $\lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2$

إذن $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1-2\sqrt{x-1}}{(x-1)} = -\infty$

③ لدينا $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x+1}+2}$

ومنه $= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1/\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2/\sqrt{x}\right)}$

بما أن $\lim_{x\to +\infty} -\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

وكذلك $\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

و $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

إذن $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x+1}+2} \ +\infty$

④ لدينا $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{2x}-2}{\sqrt{x}-2}$

ومنه $= \lim_{x\to 4} \frac{2x-8}{(\sqrt{x}-2)\left(\sqrt[3]{2x}^2+2\sqrt[3]{2x}+2^3\right)}$

وعليه $= \lim_{x\to 4} \frac{2\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt[3]{2x}^2+2\sqrt[3]{2x}+2^3\right)}$

$= \lim_{x\to 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt[3]{2x}^2+2\sqrt[3]{2x}+2^3} = \frac{1}{2}$

إذن $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{2x}-8}{\sqrt{x}-2} = \frac{1}{2}$

التمرين 02

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1,2[$ بمايلي: $f(x) = \sqrt{x}(x-1)-1$

• لدينا $x \to x-1$ متصلة على $]1,2[$

و $x \to \sqrt{x}$ متصلة على $]1,2[$

إذن f دالة متصلة على $]1,2[$ لأنها جداء دالتين متصلتين

• ولدينا $f(1) = -1$

و $f(2) = -1+\sqrt{2}$

إذن $f(1)\times f(2) < 0$

وحسب مبرهنة القيم الوسطية يوجد على الأقل عنصر α من المجال $]1,2[$ بحيث

$f(\alpha) = 0$

أي $\sqrt{\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$

من إنجاز التلميذة:

فاطمة الزهراء جدي.

التمرين 03

لدينا $f(x) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

1) أ. لنحدد D_f

$D_f = \{x\in\mathbb{R} / \sqrt{x} \neq 0 , x \geq 0\}$

أي $D_f = \{x\in\mathbb{R} / x > 0\}$

$D_f =]0,+\infty[$

ب لنحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = 1$

لنحسب $\lim_{x\to0^+} f(x)$

لدينا $\lim_{x\to0^+} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

بما أن $\lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0^+$

فإنه $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

وعليه $\lim_{x\to0^+} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = +\infty$

2) أ- لنثبت أن

$(\forall x\in]0,+\infty[); f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

لدينا $f'(x) = \left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3\right)'$

$f'(x) = 3\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$

$f'(x) = 3\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\right)$

إذن $f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

ب: لدينا $f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1

اذا f تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$

3) لنثبت أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على J

لدينا f دالة متصلة وتناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ إذن f تقبل دالة عكسية معرفة على J بحيث

$J = f]+\infty,0[=]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to0} f(x)[$

$=]1,+\infty[$

4) لنحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^3 = x$

$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt[3]{x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt[3]{x}-1$

$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$

$\Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)^2$

إذن $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)^2$ لكل x من $]1,+\infty[$