



❖ نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $D_f = \left[\frac{-35}{2}; +\infty \right[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt{2x+35}$. الرسم أسفله (C_f)

يمثل منحنى للدالة f والمستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x$ في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

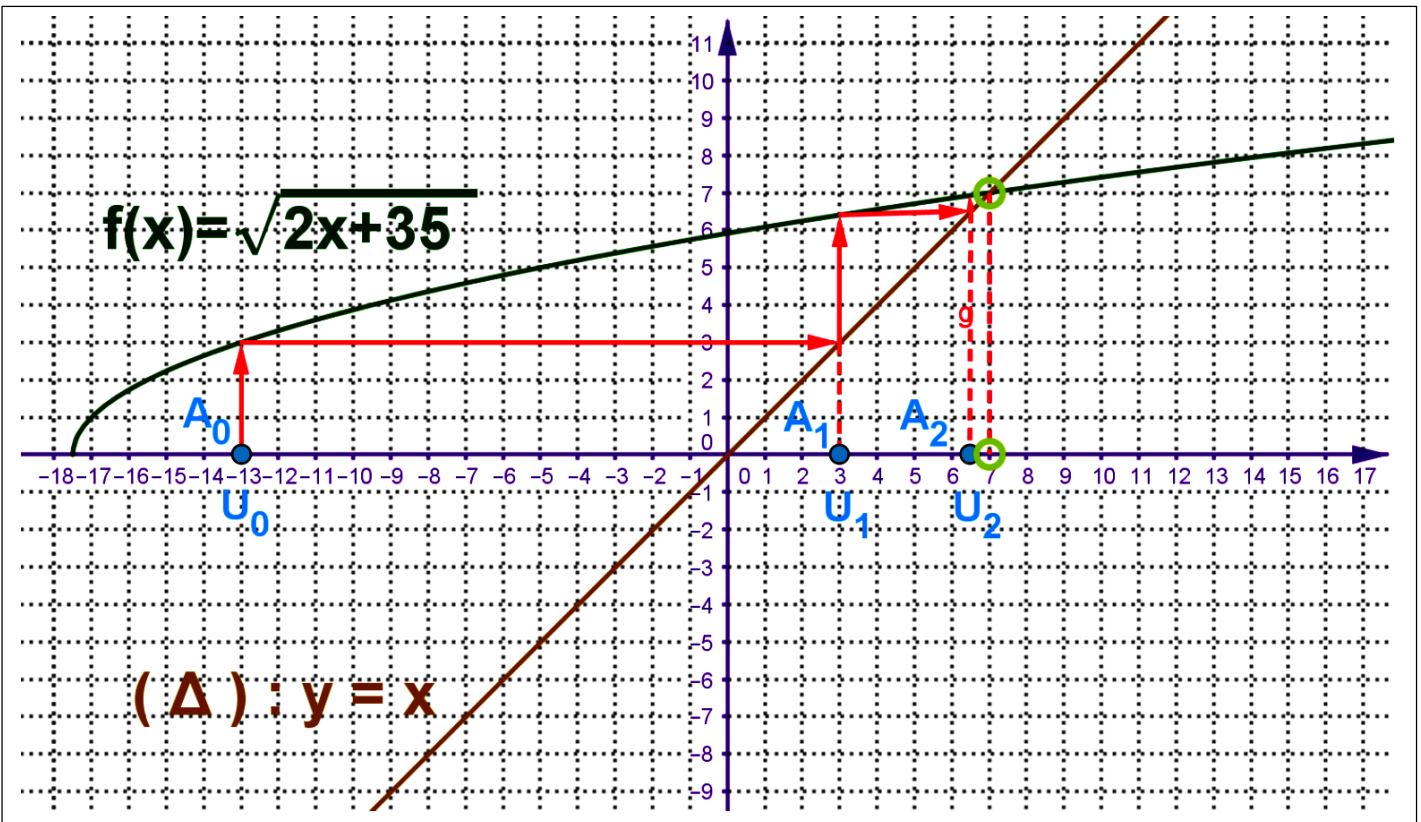
❖ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$: $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}$ و $u_0 = -13$.

• الطريقة 1 : لمعرفة نهاية u_n مبيانيا .

01. نمثل على محور الأفاصل النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و A_4 التي أراتبها منعدمة و أفاصيلها هي u_0 و u_1 و u_2 و u_3 و u_4

على التوالي . مع $u_1 = 3$ و $u_2 = 6,403$ و $u_3 = 6,914$ و $u_4 = 6,988$.

على المنحنى ضع المسلك الذي نتبعه للحصول على قيم هذه الحدود و هي ممثلة على محور الأفاصل بدون استعمال قيم u_1 و u_2 و u_3 و u_4 .



02. ما هو التظنن الذي نحصل عليه ؟

- المتتالية u_n تزايدية .
- المتتالية u_n مكبورة ب 7 .
- الحدود u_n محصورة بين -13 و 7 أي $\forall n \in \mathbb{N}, -13 \leq u_n \leq 7$ و كذلك الحدود ماعدا $u_0 = -13$ محصورة بين 3 و 7 أي $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \leq u_n \leq 7$.
- المتتالية متقاربة .
- نهاية المتتالية هي 7 .
- الطريقة 2 لتحديد نهاية u_n .



01...

أ- أحسب f' الدالة المشتقة ل f على $D_f = \left] -\frac{35}{2}; +\infty \right[$.

$$f'(x) = (\sqrt{2x+35})' = \frac{(2x+35)'}{2\sqrt{2x+35}} = \frac{1}{\sqrt{2x+35}}$$

ب- أعط جدول تغيرات f على D_f .

نعطي جدول تغيرات f على \mathbb{R} .

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\frac{35}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$
	0	↗

02... لنعتبر المجال $I = [3; 7]$ نتحقق بأن $f(I) \subset I$.

لدينا :

• الدالة f متصلة على $I = [3; 7]$

• الدالة f تزايدية قطعاً على $I = [3; 7]$

ومنه : $f([3; 7]) = [f(3), f(7)] = [\sqrt{41}; 7] \subset [3; 7]$

خلاصة : $f(I) \subset I$

03...

أ- نبين ان : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \leq u_n \leq 7$.

لدينا :

نستدل على ذلك بالترجع :

• نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 1$.

لدينا : $u_1 = 3$ ومنه : $3 \leq u_1 = 3 \leq 7$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$.

• نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $3 \leq u_n \leq 7$ صحيحة (معطيات الترجع)

• نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

لدينا : حسب معطيات الترجع $3 \leq u_n \leq 7 \Rightarrow 2 \times 3 \leq 2 \times u_n \leq 2 \times 7$

$$\Rightarrow 2 \times 3 + 35 \leq 2 \times u_n + 35 \leq 2 \times 7 + 35$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 \times 3 + 35} \leq \sqrt{2 \times u_n + 35} \leq \sqrt{2 \times 7 + 35}$$

$$\Rightarrow 3 \leq \sqrt{41} \leq u_{n+1} \leq 7 \quad ; \quad (3 \leq \sqrt{41} ; \sqrt{49} = 7)$$

$$\Rightarrow 3 \leq u_{n+1} \leq 7$$



ومنه : $3 \leq u_{n+1} \leq 7$

إذن العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 3 \leq u_n \leq 7$

ب- بين أن المتتالية تزايدية .

نبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq u_{n+1}$

نستدل على ذلك بالترجع :

• نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$.

لدينا : $u_1 = 3$ و $u_0 = -13$ ومنه : $u_0 \leq u_1$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n=0$.

• نفترض أن العلاقة صحيحة إلى $n-1$ أي $u_{n-1} \leq u_n$ صحيحة (معطيات التراجع)

• نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $u_n \leq u_{n+1}$.

لدينا : حسب معطيات التراجع $(I = [3;7])$ لأن f تزايدية على $(I = [3;7])$ $u_{n-1} \leq u_n \Rightarrow f(u_{n-1}) \leq f(u_n)$

$$\Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$$

ومنه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.

و بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq u_{n+1}$

خلاصة : u_n تزايدية

ملحوظة : يمكن دراسة إشارة الفرق ل $u_{n+1} - u_n$ وهذه الطريقة تستعمل فقط في بعض الدوال حيث صيغتها بسيطة .

ج- بين أن : (u_n) لها نهاية منتهية l .

لدينا :

- $u_n \leq 7$ حسب ما سبق إذن u_n مكبورة ب 7 .

- u_n تزايدية .

- u_n متقارب (حسب خاصية) .

خلاصة : u_n متقارب إذن لها نهاية منتهية .

د- بين أن : $l \geq 3$.

بما أن جميع الحدود ما عدا u_0 محصورة بين 3 و 7 إذن l نهاية u_n تحقق $l \geq 3$

ه- حدد قيمة l .

لدينا :

• الدالة f متصلة على $I = [3;7]$.

• $f([3;7]) \subset [3;7]$

• $u_1 = 3 \in [3;7]$

• u_n متقارب .

إذن : l نهاية u_n هي حل للمعادلة $f(x) = x ; x \in [3;7]$.

نحل المعادلة :

لدينا :



$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{2x+35} = x$$

$$\Leftrightarrow 2x+35 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \in [3;7] \vee x = -5 \notin [3;7]$$

ومنه : $\ell = 7$

خلاصة: قيمة ℓ نهاية المتتالية u_n هي $\ell = 7$.

• الطريقة 3:

01.

أ- نبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - 7 = \frac{2(u_n - 7)}{\sqrt{2u_n + 35} + 7}$

لدينا :

$$\cdot u_{n+1} - 7 = \sqrt{2u_n + 35} - 7 = \frac{(\sqrt{2u_n + 35} - 7)(\sqrt{2u_n + 35} + 7)}{\sqrt{2u_n + 35} + 7} = \frac{(2u_n + 35) - 49}{\sqrt{2u_n + 35} + 7} = \frac{2(u_n - 7)}{\sqrt{2u_n + 35} + 7}$$

خلاصة: $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - 7 = \frac{2(u_n - 7)}{\sqrt{2u_n + 35} + 7}$

ب- نستنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; |u_{n+1} - 7| \leq \frac{2}{7}|u_n - 7|$

لدينا

$$\sqrt{2u_n + 35} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2u_n + 35} + 7 \geq 7$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2u_n + 35} + 7} \leq \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow 2|u_n - 7| \times \frac{1}{\sqrt{2u_n + 35} + 7} \leq 2|u_n - 7| \times \frac{1}{7} ; (2|u_n - 7| \geq 0) u_{n+1} - 7 = \frac{2(u_n - 7)}{\sqrt{2u_n + 35} + 7}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - 7| \leq \frac{2}{7} \times |u_n - 7| ; \left(u_{n+1} - 7 = \frac{2(u_n - 7)}{\sqrt{2u_n + 35} + 7} \right)$$

$$|u_{n+1} - 7| \leq \frac{2}{7} \times |u_n - 7| : \text{ومنه}$$

خلاصة: $\forall n \in \mathbb{N}^* ; |u_{n+1} - 7| \leq \frac{2}{7}|u_n - 7|$

ج- نبين بالترجع : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; |u_n - 7| \leq 4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$

نستدل على ذلك بالترجع :

• نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 1$



لدينا : $|u_1 - 7| = |3 - 7| = 4 \leq 4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^1$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$.

• نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $|u_n - 7| \leq 4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$ صحيحة (معطيات الترجع)

• نبين أن العلاقة صحيحة ل $n + 1$. أي نبين أن : $|u_{n+1} - 7| \leq 4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}$

لدينا :

• $|u_{n+1} - 7| \leq \frac{2}{7} \times |u_n - 7|$ (حسب السؤال السابق) . (1)

• حسب معطيات الترجع $|u_n - 7| \leq 4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$. (2)

• من خلال العلاقتين (1) و (2) نستنتج أن : $|u_{n+1} - 7| \leq 4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \Rightarrow |u_{n+1} - 7| \leq \frac{2}{7} \times |u_n - 7| \leq \frac{2}{7} \times 4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$

ومنه : $|u_{n+1} - 7| \leq 4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}$

ومنه : العلاقة صحيحة ل $n + 1$.

و بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; |u_n - 7| \leq 4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$

خلاصة : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; |u_n - 7| \leq 4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$

د نستنتج نهاية u_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

لدينا :

• $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 \leq |u_n - 7| \leq 4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$ (حسب السؤال السابق) ومنه : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; |u_n - 7| \leq 4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$

• لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$ (لأن $-1 < \frac{2}{7} < 1$) .

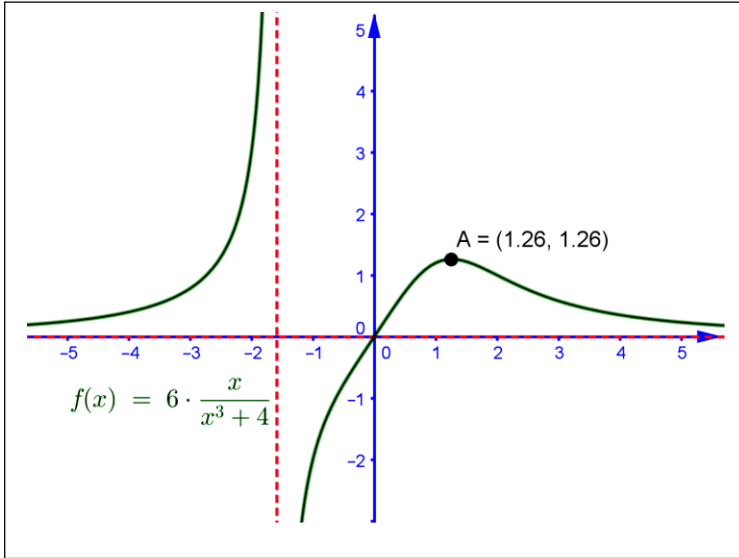
• إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 7| = 0$ (حسب أحد مصادق التقارب) ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 7 = 0$ ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$.

خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$

02

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{6x}{x^3 + 4}$

01



أ- نحدد مجموعة تعريف الدالة f .
لدينا :

$$\begin{aligned} x \in D_f &\Leftrightarrow x^3 + 4 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow -x^3 \neq 4 \\ &\Leftrightarrow (-x)^3 \neq 4 \\ &\Leftrightarrow (-x) \neq \sqrt[3]{4} \\ &\Leftrightarrow x \neq -\sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

ب- خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt[3]{4}\}$

ب- ضع جدول لتغيرات الدالة f .

لدينا : $f'(x) = \left(\frac{6x}{x^3 + 4} \right)' = \frac{-12(x^3 - 2)}{(x^3 + 4)^2}$

جدول تغيرات الدالة f هو كالتالي .

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	+	0	-	
$f(x)$			$+\infty$		$\sqrt[3]{2}$	
	0	↗		↗	↘	0
			$-\infty$			

ج- حدد $f\left([1; \sqrt[3]{2}]\right)$.

لدينا :

• الدالة f متصلة على $I = [0; \sqrt[3]{2}]$

• الدالة f تزايدية قطعاً على $I = [1; \sqrt[3]{2}]$

ومنه : $f\left([1; \sqrt[3]{2}]\right) = [f(1), f(\sqrt[3]{2})] = \left[\frac{6}{5}; \sqrt[3]{2}\right] \subset [1; \sqrt[3]{2}]$

ب- خلاصة : $f(I) \subset I$

02 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

أ- بين بالترجع : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n < \sqrt[3]{2}$.

لدينا :

نستدل على ذلك بالترجع :

• نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$.

لدينا : $u_0 = 1$ ومنه : $1 \leq u_0 = 1 < \sqrt[3]{2}$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$.



• نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $1 \leq u_n < \sqrt[3]{2}$ صحيحة (معطيات الترجع)

• نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $1 \leq u_{n+1} < \sqrt[3]{2}$.

• لدينا : حسب معطيات الترجع : $1 \leq u_n < \sqrt[3]{2} \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt[3]{2})$

(لأن الدالة f تزايدية على $I = [0; \sqrt[3]{2}]$)

$$\Rightarrow \frac{6}{5} \leq u_{n+1} \leq \sqrt[3]{2}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{6}{5} \leq u_{n+1} \leq \sqrt[3]{2}$$

ومنه : $1 \leq u_{n+1} < \sqrt[3]{2}$

إذن العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n < \sqrt[3]{2}$

ب- أدرس رتبة المتتالية (u_n) ثم استنتج تقارب المتتالية (u_n) .

• نبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq u_{n+1}$

• نستدل على ذلك بالترجع :

• نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$.

• لدينا : $u_0 = 1$ و $u_1 = \frac{6}{5}$ ومنه : $u_0 \leq u_1$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n=0$.

• نفترض أن العلاقة صحيحة إلى $n-1$ أي $u_{n-1} \leq u_n$ صحيحة (معطيات الترجع)

• نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $u_n \leq u_{n+1}$.

• لدينا : حسب معطيات الترجع $(u_{n-1} \leq u_n \Rightarrow f(u_{n-1}) \leq f(u_n))$ (لأن f تزايدية على $I = [1; \sqrt[3]{2}]$)

$$\Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$$

• ومنه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.

• و بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \leq u_{n+1}$

خلاصة : u_n تزايدية

ملحوظة : يمكن دراسة إشارة الفرق ل $u_{n+1} - u_n$ وهذه الطريقة تستعمل فقط في بعض الدوال حيث صيغتها بسيطة .

ج- حدد نهاية المتتالية (u_n) .

• لدينا :

• الدالة f متصلة على $I = [1; \sqrt[3]{2}]$.

$$\cdot f\left([1; \sqrt[3]{2}]\right) \subset [1; \sqrt[3]{2}]$$

$$\cdot u_0 = 1 \in [1; \sqrt[3]{2}]$$

• u_n متقارب .

• إذن : l نهاية u_n هي حل للمعادلة $f(x) = x$; $x \in [1; \sqrt[3]{2}]$.

• نحل المعادلة :



لدينا :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{6x}{x^3 + 4} = x$$

$$\Leftrightarrow 6x = x(x^3 + 4)$$

$$\Leftrightarrow x(6 - x^3 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2 - x^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \notin [1; \sqrt[3]{2}] \vee x = \sqrt[3]{2} \in [1; \sqrt[3]{2}]$$

ومنه : $l = \sqrt[3]{2}$ خلاصة : قيمة l نهاية المتتالية u_n هي $l = \sqrt[3]{2}$.