

## الجداء المتجهي

المعلم متعامد ممنظم مباشر

- لتكن المتجهتين  $\vec{u}(a,b,c)$  و  $\vec{v}(a',b',c')$  الجداء السلمي نرمز له ب :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = aa' + bb' + cc'$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \begin{pmatrix} bb' - cc' \\ cc' - aa' \\ aa' - bb' \end{pmatrix}$$

معادلة المستوى (ABC) نحصل عليها من خلال العلاقة

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$S = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2} : \text{مساحة مثلث ABC هي}$$

$$d(A, D) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} \text{ هي مسافة نقطة A عن مستقيم } D(B, \vec{u})$$

- $P(A, \vec{u}, \vec{v})$  مستوى يمر من A وموجه بالمتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$

المتجهة  $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  متجهة منظمة على (P)

- إذا كان  $D = P \cap Q$  فإن المتجهة  $\vec{n}$  موجهة ل (D) والعادلتين الديكارتيين ل (D) هما

$$(D) \begin{cases} ax+by+cz+d=0 & (P) \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 & (Q) \end{cases}$$

## الفئة

- (S) فلكة أحد أقطارها  $[AB]$  :  $M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

- (S) فلكة مركزها  $\Omega(a,b,c)$  وشعاعها r معادلة (S) هي  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

- المعادلة :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  هي معادلة فلكة مركزها  $\Omega(a,b,c)$  وشعاعها  $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

(إذا كانت  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ )

- **تمثيل بارامترى لفلكة** مركزها  $\Omega(a,b,c)$  وشعاعها R

$$\begin{cases} x = a + R \sin \varphi \cos \alpha \\ y = b + R \sin \varphi \sin \alpha \\ z = c + R \cos \varphi \end{cases} \quad (\varphi, \alpha \in \mathbb{R})$$

- (S) فلكة مركزها  $\Omega$  وشعاعها r و (P) مستوى .

- $d(\Omega, P) = r \Leftrightarrow S \cap P = \{H\}$  (P) مماس ل (S)

$$d(\Omega, P) > r \Leftrightarrow S \cap P = \emptyset$$

- $d(\Omega, P) < r \Leftrightarrow S \cap P = C(H, r')$  حيث C دائرة مركزها H وشعاعها r'

$$(P) \text{ هو المسقط العمودي ل } \Omega \text{ على } (P) \text{ و } r' = \sqrt{r^2 - (d(\Omega, P))^2}$$

- (S) فلكة مركزها  $\Omega$  وشعاعها r و (D) مستقيم

$$d(\Omega, D) = r \Leftrightarrow S \cap D = \{A\} \text{ o}$$

$$d(\Omega, D) > r \Leftrightarrow S \cap D = \emptyset \text{ o}$$

$$d(\Omega, D) < r \Leftrightarrow S \cap D = \{A, B\}$$

نحصل على التقاطع بتعويض تمثيل بارامترى (D) في معادلة (P)

- معادلة المماس (P) ل (S) في A نحصل عليها من العلاقة

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

## المسقط العمودي لنقطة على مستوى

A نقطة من الفضاء و (P) مستوى

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} = t\vec{n} \\ H \in P \end{cases} \Leftrightarrow (P) \text{ على A ل } H \text{ المسقط العمودي ل A على (P)}$$

## الجداء السلمي في الفضاء

- لتكن المتجهتين  $\vec{u}(a,b,c)$  و  $\vec{v}(a',b',c')$  الجداء السلمي نرمز له ب :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = aa' + bb' + cc'$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = aa' + bb' + cc'$$

## المسافة AB

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \|\overrightarrow{AB}\|$$

## متجهة منظمة على مستوى

كل متجهة موجهة لمستقيم عمودي على مستوى (P) تسمى متجهة منظمة على (P) ونرمز لها ب  $\vec{n}$

- مجموعة النقط M حيث  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = k$  حيث  $\vec{n}$  غير منعدمة و A نقطة معلومة k عدد حقيقي هي مستوى يمر من A ويقبل  $\vec{n}$  متجهة منظمة عليه

- مجموعة النقط  $M(x, y, z)$  حيث  $ax + by + cz + d = 0$  هي مستوى يقبل  $\vec{n}(a, b, c)$  منظمة عليه .

إذا كانت  $\vec{n}(a, b, c)$  منظمة على (P) فإن

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

## التوازي le parallélisme

نعتبر المستويين (P):  $ax + by + cz + d = 0$

$$(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$$\left| \frac{ab}{ab} \right| = \left| \frac{bc}{b'c'} \right| = \left| \frac{ac}{a'c'} \right| = 0 \Leftrightarrow P \parallel P'$$

يكون P و P' متقاطعين اذا فقط إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة .

نتيجة : كل مستوى مواز للمستوى  $(P): ax + by + cz + d = 0$

له معادلة على الشكل :  $ax + by + cz + d' = 0$

- مستقيمين  $D'(B, \vec{u})(\alpha, \beta, \gamma)$  ;  $D(A, \vec{u})(\alpha, \beta, \gamma)$

$$D \parallel D' \Leftrightarrow \left| \frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'} \right| = \left| \frac{\alpha\alpha'}{\gamma\gamma'} \right| = \left| \frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} \right| = 0$$

- $(P) \parallel D \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$  (حيث  $\vec{w}, \vec{v}$  موجهتين ل (P))

## التعامد l'ortogonalité

نعتبر المستويين (P):  $ax + by + cz + d = 0$

$$(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$$P \perp P' \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$$

$$D \perp P \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{n}(a, b, c)$$

## توازي وتعامد مستقيم ومستوى

ليكن  $D(A, \vec{u})$  و (P) يقبل  $\vec{n}$  متجهة منظمة عليه :

$$D \parallel P \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

$$D \perp P \Leftrightarrow \vec{u} \text{ مستقيميتين } \vec{n}$$

## مسافة نقطة عن مستوى

$$A(x_0, y_0, z_0) \text{ و } (P): ax + by + cz + d = 0$$

$$d(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$