

تصحيح التمرين 1

1. لدينا :  $\vec{OA}(1,2,1)$  و  $\vec{OB}(1,3,1)$

$$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{i} + \vec{k} \quad \text{لدينا :}$$

2. لدينا  $\vec{OA} \wedge \vec{OB}(-1,0,1)$  متجهة منظمية للمستوى  $(OAB)$

إذن معادلة ديكرتية للمستوى  $(OAB)$  تكتب على شكل :  $(-1)x + (0)y + (1)z + d = 0$

و لدينا :  $O(0,0,0) \in (OAB)$  : إذن  $(-1)(0) + (0)(0) + (1)(0) + d = 0$  أي  $d = 0$

إذن المعادلة تصبح :  $-x + z = 0$

و منه :  $x - z = 0$  معادلة ديكرتية للمستوى  $(OAB)$

3. بما أن : الفلكة  $(S)$  مماسة للمستوى  $(OAB)$  فإن شعاع  $(S)$  هو :

$$d(\Omega, (OAB)) = \frac{|(-3) - (1)|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

ولدينا  $\Omega(-3,0,1)$  هو مركز الفلكة  $(S)$

إذن معادلة الفلكة  $(S)$  :  $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$

4. نقطة التماس هي نقطة تقاطع المستوى  $(OAB)$  مع المستقيم  $(\Delta)$  العمودي على  $(OAB)$  و المار من  $\Omega(-3,0,1)$ .

لدينا  $\vec{OA} \wedge \vec{OB}(-1,0,1)$  موجهة للمستقيم  $(\Delta)$

لأن  $(\Delta) \perp (OAB)$  و  $\vec{OA} \wedge \vec{OB}$  متجهة للمستوى  $(OAB)$

$$\begin{cases} x = -3 - t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{إذن تمثيل بارامترى للمستقيم } (\Delta) \text{ هو : } (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = -1 \\ t = -2 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \\ x - z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{و منه مثلوث إحداثيات نقطة التماس هو حل للنظمة :}$$

و بالتالي مثلوث إحداثيات نقطة التماس هو :  $(-1,0,-1)$

5. لدينا :  $H(-1,0,-1) \in (S)$  ، بما أن  $\vec{\Omega H}(2,0,-2)$  فإن  $\vec{\Omega H} \wedge \vec{u} = 10\vec{i} - 8\vec{j} + 10\vec{k}$

و لدينا :  $d(\Omega, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega H} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{264}}{\sqrt{33}} = 2\sqrt{2}$  ، حيث  $(D)$  هو المستقيم المار من  $H$  و الموجه بالمتجهة

$$\vec{u}(2,5,2)$$

و بما أن  $2\sqrt{2}$  شعاع الفلكة  $(S)$  فإن  $(D)$  مماس للفلكة  $(S)$ .

## تصحيح التمرين 2

1. أ) لدينا  $\overrightarrow{AB}(0,4,-2)$  و  $\overrightarrow{BC}(-1,-2,2)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$d(A, (BC)) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{ب)}$$

2.  $H$  هي نقطة تقاطع المستوى  $(P)$  المار من  $A$  و العمودي على  $(BC)$  مع المستقيم  $(BC)$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) : (BC) \text{ تمثيل بارامترى للمستقيم}$$

لدينا  $\overrightarrow{BC}(-1,-2,2)$  منظمية للمستوى  $(P)$  إذن معادلة ديكرتية للمستوى  $(P)$  تكتب على شكل :

$$-x - 2y + 2z + d = 0$$

و لدينا :  $A(2,-1,1) \in (P)$  إذن :  $-(2) - 2(-1) + 2(1) + d = 0$  إذن :  $d = -2$

$$\text{أي : } (P) : -x - 2y + 2z - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{5}{3} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 2t \\ -x - 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

و منه مثلوث إحداثيات نقطة التماس هو حل للنظمة :

و بالتالي :  $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$  هو مثلوث إحداثيات  $H$

$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{HM} = 0 \quad .3$$

لدينا :  $\overrightarrow{AM}(x-2, y+1, z-1)$  و  $\overrightarrow{HM}\left(x-\frac{2}{3}, y-\frac{1}{3}, z-\frac{5}{3}\right)$

$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow (x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right) + (y+1)\left(y-\frac{1}{3}\right) + (z-1)\left(z-\frac{5}{3}\right) = 0$$

$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{8}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{8}{3}z + \frac{8}{3} = 0$$

### تصحيح التمرين 3

.1

$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1 = 4 + 1 - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-(-1))^2 = (\sqrt{3})^2$$

إذن  $(S)$  هي الفلكة التي مركزها  $\Omega(0, 2, -1)$  و شعاعها  $R = \sqrt{3}$

.2 (أ) لدينا :  $(-1)^2 + ((1)-2)^2 + ((0)+1)^2 = 1+1+1 = 3 = (\sqrt{3})^2$

إذن :  $A(-1, 1, 0) \in (S)$

(ب)  $(P)$  مماس ل  $(S)$  عند النقطة  $A$

لدينا  $A$  هي المسقط العمودي ل  $\Omega$  على  $(P)$

إذن  $\overrightarrow{A\Omega}(1, 1, -1)$  منظمية للمستوى  $(P)$

إذن معادلة للمستوى  $(P)$  تكتب على شكل :  $(1)x + (1)y + (-1)z + d = 0$

و لدينا  $A(-1, 1, 0) \in (P)$  إذن :  $(1)(-1) + (1)(1) + (-1)(0) + d = 0$  أي :  $d = 0$

و منه معادلة للمستوى  $(P)$  تكتب على شكل :  $x + y - z = 0$

.3 (أ) لدينا :  $\vec{n}(1, 1, 1)$  متجهة منظمية للمستوى  $(Q)$  و  $B(1, 3, -2) \in (Q)$

$$M(x, y, z) \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0$$

لدينا :  $\overrightarrow{BM}(x-1, y-3, z+2)$

$$M(x, y, z) \in (Q) \Leftrightarrow (1)(x-1) + (1)(y-3) + (1)(z+2) = 0$$

و منه :  $(Q): x + y + z - 2 = 0$

$$d(\Omega, (Q)) = \frac{|(0) + (2) + (-1) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ب) لدينا :}$$

بما أن  $d(\Omega, (Q)) < R$  فإن  $(Q)$  يقطع  $(S)$  وفق دائرة شعاعها :

$$r = \sqrt{R^2 - (d(\Omega, (Q)))^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

مركز الدائرة  $H$  هو نقطة تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  المار من  $\Omega$  و العمودي على  $(Q)$  مع المستوى  $(Q)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{7}{3} \\ z = \frac{-2}{3} \\ t = \frac{1}{3} \end{array} \right. \quad \text{أي} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 2+t \\ z = -1+t \\ x + y + z - 2 = 0 \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{مثلوث إحداثيات } H \text{ هو حل للنظمة}$$

$$\text{ومنه } H \left( \frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{-2}{3} \right)$$

#### تصحيح التمرين 4

1. أ) لدينا  $\overrightarrow{OA}(1, -1, 3)$  متجهة موجهة للمستقيم  $(OA)$

$$M(x, y, z) \in (OA) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = t \cdot \overrightarrow{OA} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = -t \\ z = 3t \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب) لدينا  $\overrightarrow{OA}(1, -1, 3)$  منظمية للمستوى  $(Q)$

إذن معادلة ديكراتية للمستوى  $(Q)$  نكتب على شكل :  $x - y + 3z + d = 0$

و لدينا :  $A(1, -1, 3) \in (Q)$  إذن :  $(1) - (-1) + 3(3) + d = 0$  أي  $d = -11$

و منه معادلة ديكراتية للمستوى  $(Q)$  :  $x - y + 3z - 11 = 0$

ج)  $\vec{n}(1, -1, 3)$  متجهة منظمية للمستوى  $(P)$  و  $\vec{n}'(1, -1, 3)$  متجهة منظمية للمستوى  $(Q)$

بما أن  $\vec{n}$  و  $\vec{n}'$  مستقيمتان فإن  $(P) \parallel (Q)$

2. أ) بما أن  $(Q)$  مماس للفلكة  $(S)$  في النقطة  $A$  فإن  $A$  هي المسقط العمودي للنقطة  $\Omega$  على  $(Q)$  و منه :

$$\boxed{(\Omega A) \perp (Q)}$$

و بما أن  $(P)$  يقطع  $(S)$  وفق دائرة  $(\Gamma)$  مركزها  $O$  فإن  $O$  هي المسقط العمودي للنقطة  $\Omega$  على  $(P)$  و منه :

$$(\Omega O) \perp (P)$$

و بما أن  $(P) \parallel (Q)$  فإن

$$\boxed{(\Omega O) \perp (Q)}$$

إذن النقط  $\Omega$  و  $A$  و  $O$  مستقيمية . و بالتالي  $\Omega \in (OA)$ .

$$\begin{cases} a = t \\ b = -t \\ c = 3t \end{cases}$$

بما أن  $\Omega(a, b, c) \in (OA)$  فإن المثلوث  $(a, b, c)$  يحقق التمثيل البارامتري للمستقيم  $(OA)$  أي :

$$c = 3a \text{ و } b = -a \text{ و منه :}$$

ب) لدينا :  $R^2 = (d(\Omega, (P)))^2 + r^2$  حيث  $R$  هو شعاع الفلكة  $(S)$  و  $r$  هو شعاع الدائرة  $(\Gamma)$

و بما أن المستوى  $(Q)$  مماس للفلكة  $(S)$  في النقطة  $A$  فإن  $R = \Omega A$

و لدينا كذلك  $d(\Omega, (P)) = \Omega O$  و  $r = \sqrt{33}$

إذن :  $\Omega A^2 = \Omega O^2 + \sqrt{33}^2$  و منه :

$$\boxed{\Omega A^2 - \Omega O^2 = 33}$$

لدينا :  $\Omega O^2 = a^2 + b^2 + c^2$  و  $\Omega A^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 2b - 6c + 11$  بالتعويض في النتيجة المحصل عليها نجد :

$$\boxed{a - b + 3c = -11}$$

ج) المثلوث  $(a, b, c)$  يحقق  $b = -a$  و  $c = 3a$  و  $a - b + 3c = -11$

إذن :  $a - (-a) + 3(3a) = -11$  أي :  $a = -1$  و منه  $b = 1$  و  $c = -3$  و بالتالي :  $\Omega(-1, 1, -3)$

و لدينا كذلك :  $R = \Omega A = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

### تصحيح التمرين 5

1. لدينا :  $\vec{n}(1, 1, -1)$  متجهة منظمية للمستوى  $(P)$  و  $(D) \perp (P)$  إذن  $\vec{n}(1, 1, -1)$  موجهة للمستقيم  $(D)$

و لدينا :  $A(2, 0, 2) \in (D)$

$$M(x, y, z) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{n} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 2-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) : (D) \text{ إذن تمثيل بارامتري للمستقيم } (D)$$

2. لدينا النقطة  $B$  هي نقطة تقاطع المستقيم  $(D)$  و المستوى  $(P)$  و بالتالي مثلث ملوث إحداثياتها يحقق :

$$B(3,1,1) \text{ أي : } t=1 \text{ ومنه : } \begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 2-t \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. (أ)

$$R^2 = r^2 + AB^2$$

$$R = \sqrt{r^2 + AB^2}$$

$$R = \sqrt{(2)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$R = \sqrt{7}$$

(ب) معادلة ديكارتية للفاكدة  $(S)$  :  $(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = (\sqrt{7})^2$

$$\text{أي : } x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 1 = 0$$

### تصحيح التمرين 6

1. معادلة ديكارتية للفاكدة  $(S)$  التي مركزها  $\Omega(1, -1, 0)$  و شعاعها  $R = \sqrt{3}$  :

$$(x-1)^2 + (y-(-1))^2 + (z-0)^2 = (\sqrt{3})^2$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$$

$$\text{لدينا : } (0)^2 + (0)^2 + (1)^2 - 2(0) + 2(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$

إذن :  $A(0, 0, 1) \in (S)$

2. (أ) لدينا :  $\overrightarrow{AB}(1, 1, 0)$  و  $\overrightarrow{AC}(2, 1, 1)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

لدينا :  $(ABC)$   $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} (1, -1, -1)$  منظمية للمستوى

إذن معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$  تكتب على شكل :  $x - y - z + d = 0$

و لدينا :  $(ABC) \in A(0, 0, 1)$  إذن :  $(0) - (0) - (1) + d = 0$  و منه :  $d = 1$

و بالتالي :  $(ABC) : x - y - z + 1 = 0$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|(1) - (-1) - (0) + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad (\text{ب})$$

بما أن :  $d(\Omega, (ABC)) = R$  فإن  $(ABC)$  مماس للكرة  $(S)$

و بما أن  $A \in (S)$  و  $A \in (ABC)$  فإن  $(ABC)$  مماس للكرة  $(S)$  في النقطة  $A$

3. أ) لدينا :  $(ABC)$   $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} (1, -1, -1)$  منظمية للمستوى  $(ABC)$  و  $(\Delta) \perp (ABC)$

إذن :  $(\Delta)$   $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} (1, -1, -1)$  متجهة موجهة للمستقيم  $(\Delta)$

$$M(x, y, z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = t \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = t \\ y + 1 = -t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$$

ب) مثلوثي إحداثيات نقطتي تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  و الكرة  $(S)$  هما حل النظمة :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

نجد بالتعويض :  $t^2 = 1$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = -1 \\ t = 1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

إذن مثلوث إحداثيتي نقطتي تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  و الكرة  $(S)$  هما :  $(0, 0, 1)$  و  $(2, -2, -1)$

تصحيح التمرين 7

1. لدينا :  $\vec{AB}(1,1,2)$  و  $\vec{AC}(5,9,2)$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \vec{k} = -16\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$d(C, (AB)) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\sqrt{336}}{\sqrt{6}} = \sqrt{56} \quad .2$$

3. لدينا :  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(-16,8,4)$  متجهة منظمية للمستوى  $(ABC)$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$  تكتب على شكل :  $-16x + 8y + 4z + d = 0$

ولدينا :  $A(0,1,-1) \in (ABC)$  إذن :  $-16(0) + 8(1) + 4(-1) + d = 0$  إذن :  $d = 12$

و منه : المعادلة تصبح :  $-16x + 8y + 4z + 12 = 0$

و بالتالي معادلة  $(ABC)$  هي :  $-4x + 2y + z + 3 = 0$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 20y - 2z + 70 = 0 \quad \text{لدينا : (أ) 4}$$

$$(x-5)^2 + (y-10)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{56})^2 \quad \text{تكافئ}$$

إذن :  $(S)$  هي الفلكة التي مركزها  $C(5,10,1)$  و شعاعها  $R = \sqrt{56}$

(ب) بما أن  $d(C, (AB)) = R$  فإن  $(AB)$  مماس للفلكة  $(S)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 1+t \\ z = -1+2t \\ (x-5)^2 + (y-10)^2 + (z-1)^2 = 56 \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

مثلث إحداثيات نقطة لتمامس يحقق :

بالتعويض نجد :  $t = 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{array} \right. \quad \text{و منه :}$$

إذن النقطة  $H(3,4,5)$  هي نقطة لتمامس