I. تكامل دالة f متصلة على قطعة $[a,b]$:

01. تعريف:

f دالة متصلة على قطعة $[a,b]$ حيث F دالة أصلية ل f.

العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ يسمى تكامل f من a إلى b. و نرمز له ب: $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b$

ويقرأ : تكامل من a إلى b ل $f(x)dx$

02. ملحوظة :

- في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن تعويض المتغير x بأي متغير و منه : $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy=\int_a^b f(t)dt=\cdots$
- $\int_a^a f(t)dt=[F(t)]_a^a=F(a)-F(a)=0$

03. مثال:

1) أحسب: $\int_0^1 (x^2-2x)dx$ و $\int_1^0 (x^2-2x)dx$ و $\int_2^{1+e}\frac{4}{x-1}dx$ و $4\times\int_2^{1+e}\frac{1}{x-1}dx$

II. خاصيات التكامل : علاقة شال – خطانية التكامل – التكامل و الترتيب:

01. خاصيات :

1. خاصية :

- f قابلية للاشتقاق على $[a,b]$ و f' متصلة على $[a,b]$ ؛ لدينا : $\int_a^b f'(x)dx=[f(x)]_a^b=f(b)-f(a)$.
- $c\in\mathbb{R}$ لدينا : $\int_a^b cdx=[cx]_a^b=c(b-a)$.

2. خاصيات :

f متصلة على $[a,b]$. لدينا :

- $\int_a^a f(x)dx=0$ و $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$ و $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ (مع c من I)

3. خاصيات : (خطانية التكامل)

f و g متصلتين على مجال I مع a و b من I. لدينا :

- خطانية التكامل : $\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ و $\int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$.
- التكامل و الترتيب: f موجب على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ (منحنى f فوق محور الأفاصيل و $a\leq b$ فإن تكاملها موجب)
- $\forall x\in[a,b];f(x)\leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$ و. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx$
- $\forall x\in[a,b]:m\leq f(x)\leq M$ فإن : $(b-a)m\leq\int_a^b f(x)dx\leq(b-a)M$ أو $m\leq\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\leq M$.

4. أمثلة :

1) أحسب: $\int_{-3}^{2}|2x-4|dx$.

2) نضع: $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)dx$

3) أ - أحسب: $A+B$ و $A-B$. ب – استنتج قيمة كل من A و B .

4) بين أن : $\int_2^5 \ln(x+1)dx \le \int_2^5 \ln(x+3)dx$.

III. القيمة المتوسطة La valeur moyenne

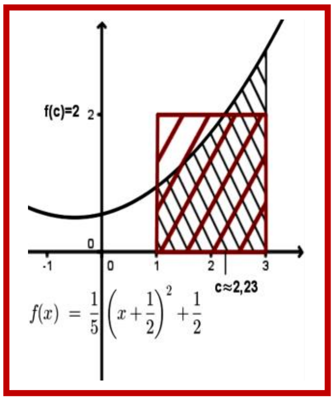
01. خاصية و تعريف:

f متصلة على مجال I مع a و b من I حيث $a<b$.

- يوجد على الأقل عنصر c من المجال $[a,b]$ حيث: $(b-a)\times f(c)=\int_a^b f(x)dx$

- العدد الحقيقي: $f(c)=\frac{1}{b-a}\times\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[a,b]$.

02. مثال:



f متصلة على مجال $[0,2]$ حيث: حدد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=3x$.

لدينا : $f(c)=\frac{1}{b-a}\times\int_a^b f(x)dx$

$$=\frac{1}{2-0}\times\int_0^2 3xdx=\frac{1}{2}\times\left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^2=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\left[x^2\right]_0^2=3$$

خلاصة : القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[0,2]$ هي $f(c)=3$

$f(c)=\frac{1}{b-a}\times\int_a^b f(x)dx$ أي $(b-a)\times f(c)=\int_a^b f(x)dx$

يوجد مستطيل بُعْدَيْه (أي الطول والعرض) $(b-\ \ )$ و a $f(c)$ مساحته هي المساحة $A=\int_a^b f(x)dx$

IV. المكاملة بالأجزاء L' integration par parties:

01. خاصية:

لتكن u و v دالتين قابلتين للإشتقاق على المجال $[a,b]$ حيث u' و v' متصلتين على $[a,b]$ لدينا:

$$\underbrace{\int_a^b u(x)\times v'(x)dx}_{(1)}=\underbrace{\left[u(x)\times v(x)\right]_a^b}_{(2)}-\underbrace{\int_a^b u'(x)\times v(x)dx}_{(3)}$$

02. طريقة وضع المكاملة بالأجزاء:

$u'(x)=\cdots$ $\quad$ $u(x)=\cdots$

$(3)\downarrow$ - $\quad$ $(2)\searrow$ $\quad$ $(1)\downarrow$

$v(x)=\cdots$ $\quad$ $v'(x)=\cdots$

03. أمثلة:

1) نحسب: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

جواب:

لنحسب I باستعمال المكاملة بالأجزاء: نضع:

$$\begin{array}{lcl} u(x)=x & & u'(x)=1 \\ (1)\downarrow \quad (2)\searrow & - & \downarrow(3) \\ v'(x)=\cos x & & v(x)=\sin x \end{array}$$

ومنه:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\times\sin x dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0\sin 0\right)-[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=\frac{\pi}{2}+0-1=\frac{\pi}{2}-1$$

خلاصة: $I=\frac{\pi}{2}-1$

2) نحسب: $J=\int_1^{e}\ell n(x)dx$

لنحسب I باستعمال المكاملة بالأجزاء: نضع:

$$\begin{array}{lcl} u(x)=\ell n(x) & & u'(x)=\frac{1}{x} \\ (1)\downarrow \quad (2)\searrow & - & \downarrow(3) \\ v'(x)=x & & v(x)=\frac{1}{2}x^2 \end{array}$$

ومنه:

$$\int_1^{e}\ell n(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ell n(x)\right]_1^{e}-\int_1^{e}\frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2dx$$

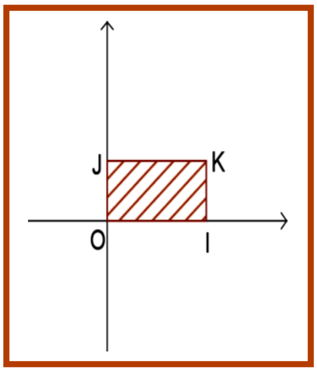
$$=\frac{1}{2}\left(e^2\ell n(e)-1^2\ell n(1)\right)-\frac{1}{2}\int_1^{e}xdx$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{e}=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}\left(e^2-1^2\right)=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

خلاصة: $J=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$

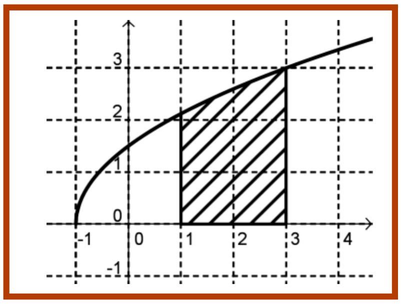
V. تطبيقات حساب التكامل:

01. حساب المساحات:



- في هذه الفقرة نأخذ المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد $(0,\vec{i},\vec{j})$
- f دالة متصلة على قطعة $[a,b]$.

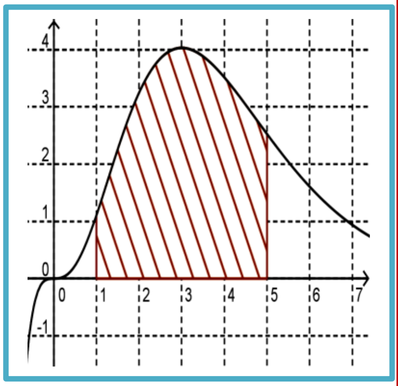
ملحوظة: وحدة قياس المساحات هي مساحة المستطيل $OIKJ$ ونرمز لها بالرمز $u.a$ $(u.a=\text{unité aire})$



- لنعتبر (F) الحيز من المستوى (P) المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=a$ و $x=b$.
- لنعتبر A مساحة الحيز (F) من المستوى (P)
- ملحوظة: المساحة تحسب بالتكامل ومرتبطة بإشارة الدالة f على $[a,b]$

المساحة بوحدة المساحة ونرمز لها ب $u.a$

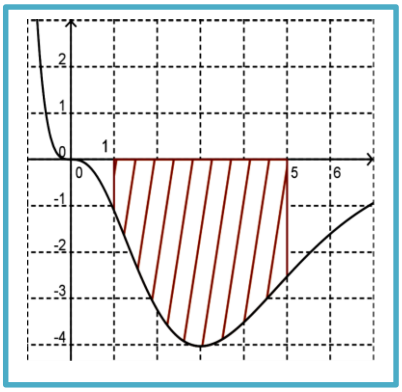
f موجبة على $[a,b]$



المساحة هي : $A=\int_a^b f(x)dx$

مثال: $\int_1^5 f(x)dx$

f سالبة على $[a,b]$

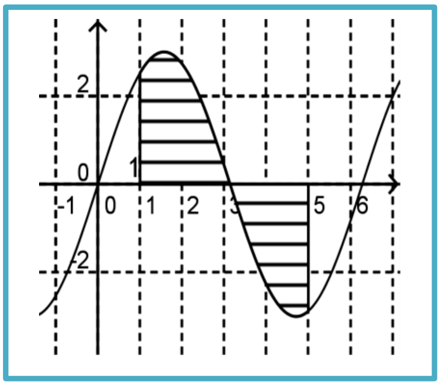


المساحة هي : $A=-\int_a^b f(x)dx$

مثال:

$A=-\int_1^5 f(x)dx=\int_5^1 f(x)dx$

f إشارتها تتغير على $[a,b]$

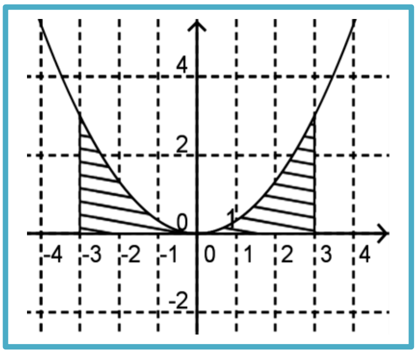


$A=\int_a^b |f(x)|dx$

مثال: $A=\int_1^5 |f(x)|dx=\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx$

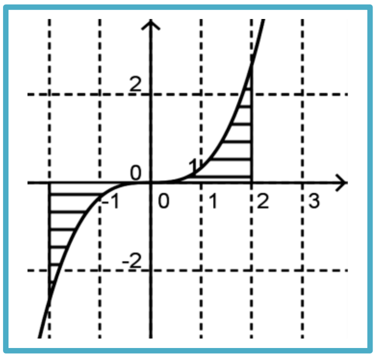
حالات خاصة

f دالة زوجية و متصلة على قطعة $[-a,a]$ و f موجبة على $[0,a]$



$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

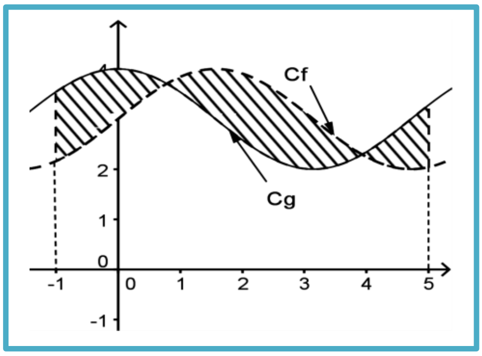
f دالة فردية و متصلة على قطعة $[-a,a]$



$\int_{-a}^a f(x)dx=0$

$\int_{-a}^0 f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx$

لنعتبر Δ مساحة الحيز الحصور (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتيهما هما $x=a$ و $x=b$



المساحة هي : $A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

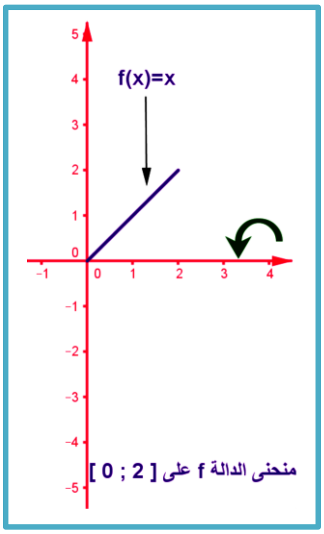
$A=\int_{-1}^5 |f(x)-g(x)|dx=-\int_{-1}^1 (f(x)-g(x))dx+\int_1^4 (f(x)-g(x))dx-\int_4^5 (f(x)-g(x))dx$

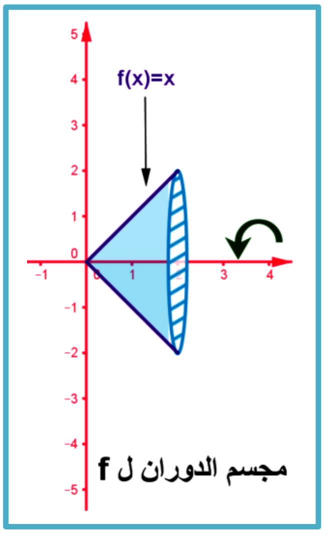
.02 حساب الحجوم: (في هذه الفقرة نعتبر: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$) .

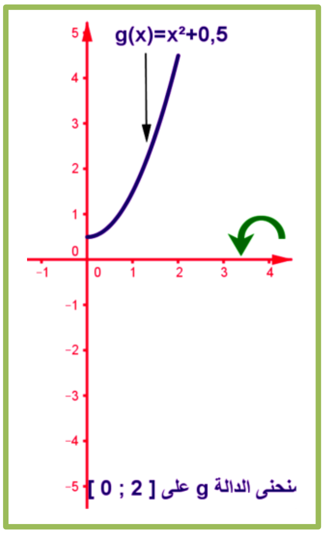
- f دالة متصلة على القطعة $[a,b]$ مع $(a<b)$.
- ليكن (C_f) منحناها في المعلم $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$.
- نفترض أن المنحنى (C_f) حيث أفاصيله محصورة بين a و b قام بدورة كاملة حول محور الأفاصيل فإنه يولد مجسم يسمى مجسم الدوران للدالة f على $[a,b]$.
- نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على $[0,2]$ بما يلي : ب: $f(x)=x$ و $g(x)=x^2+\frac{1}{2}$.
- ليكن (C_f) و (C_g) منحنيهما في المعلم $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$.

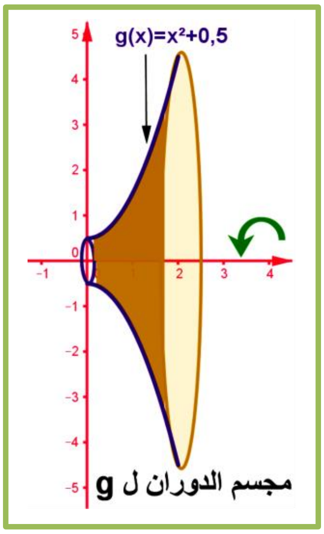
.1 السؤال المطروح : كيف نحصل على V_f حجم مجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل على المجال $[0,2]$.

.2 السؤال المطروح : كيف نحصل على V_g حجم مجسم المولد بدوران (C_g) حول محور الأفاصيل على المجال $[0,2]$.









.1 خاصية:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. f دالة متصلة على القطعة $[a,b]$ مع $(a<b)$.

حجم المجسم المولد بدوران منحنى الدالة f حول محور الأفاصيل هو: $V=\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx$ بوحدة قياس الحجوم $u.v$

.2 مثال 1 :

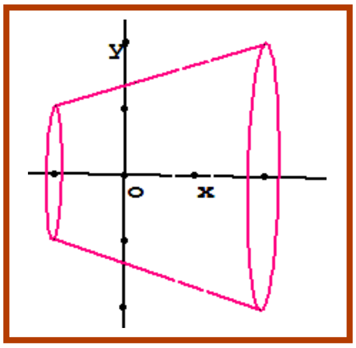
الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$؛ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1cm$

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-1,2]$ ب : $f(x)=x+5$

ليكن (C_f) منحناها في المعلم $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$.

(1 أنشئ المجسم على الرسم

(2 نحسب V حجم مجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل على المجال $[-1,2]$.



جواب:

1) أنظر الرسم الأخير.

2) حجم مجسم الدوران:

لدينا: $V=\int_a^b \pi\left(f\left(x\right)\right)^2 dx=\int_{-1}^{2} \pi\left(f\left(x\right)\right)^2 dx=\int_{-1}^{2} \pi\left(x-5\right)^2 dx=\int_{-1}^{2} \pi\left(x-5\right)^2 dx=\frac{\pi}{3}\left[\left(x-5\right)^3\right]_{-1}^{2}=\frac{189\pi}{3}$

مثال 2 :

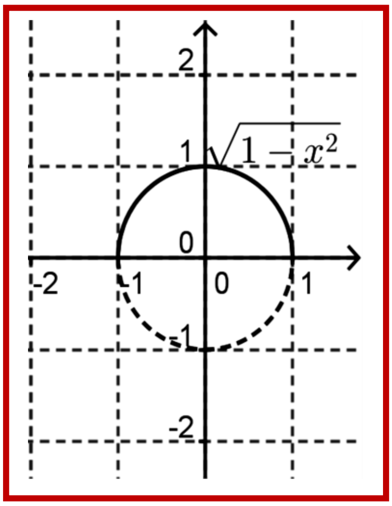
- الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$؛ $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=\left\|\vec{k}\right\|=1cm$

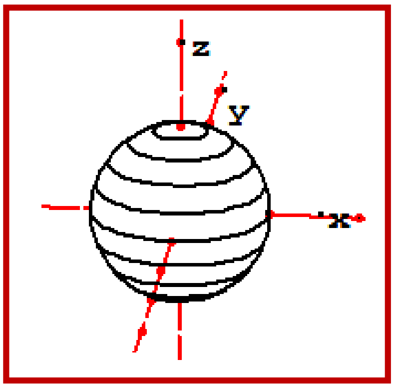
- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\left[-1,1\right]$ ب : $f\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}$

ليكن $\left(C_f\right)$ منحناها في المعلم $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$.

3) أنشئ المجسم على الرسم .

4) نحسب V حجم مجسم المولد بدوران $\left(C_f\right)$ حول محور الأفاصيل على المجال $\left[-1,1\right]$





جواب :

1) أنظر الرسم الأخير.

2) حجم مجسم الدوران:

3. جواب:

لدينا: $V=\int_a^b \pi\left(f\left(x\right)\right)^2 dx$

$$=\int_{-1}^{1} \pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

$$=\int_{-1}^{1} \pi\left(1-x^2\right)dx$$

$$=\pi\int_{1}^{1} (1-x^2)dx$$

$$=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{4\pi}{3}cm^3$$

ط2: (حجم كرة شعاعها هو $R=1$).