

التكامل

(III) تقنيات حساب التكامل .

(I) المكاملة بالأجزاء .

لتكن f و g دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال I بحيث تكون f' و g' متصلتين على I وليكن a و b من I لدينا :

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

(IV) جدول الدوال الأصلية الاعتيادية

الدالة f	دالة أصلية F	الدالة f	دالة أصلية F
$u'e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	0	1
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$a \neq 0$	ax
$\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	$\arctan(u(x))$	x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$\cos x$	$\sin x$	$(r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$\sin x$	$-\cos x$	$u'u^r$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$(r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$
$= \frac{1}{\cos^2 x}$		$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\frac{u'}{u}$	$-\frac{1}{u}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$1 + \tan^2(ax+b)$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$= \frac{1}{\cos^2(ax+b)}$		$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin u(x)$	$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos u(x)$	u	e^x
$u'(x)(1 + \tan^2(u(x)))$	$\tan u(x)$	e^x	$\frac{1}{a}e^{ax}$
		e^{ax}	

(I) تعريف .

لتكن f دالة متصلة على مجال I وليكن a و b من I .

نسمي تكامل f من a إلى b العدد الذي نرمز له بـ $\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{والمعرف بما يلي :}$$

حيث F دالة أصلية للدالة f .

ملاحظة .

$$(*) \text{ نكتب } \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(*) يمكن تعويض المتغير x بأي متغير آخر

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

(II) خاصيات

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I وليكن a و b و c من I

$$(1) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$(2) \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$(3) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{(علاقة شال)}$$

$$(4) \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$(5) \int_a^b af(x)dx = a \int_a^b f(x)dx \quad \text{حيث } a \in \mathbb{R}$$

$$(6) \text{ الدالة } F(x) = \int_a^x f(x)dx \text{ هي الدالة الأصلية للدالة } f \text{ التي}$$

تتقدم في a .

$$(7) \text{ إذا كان } a \leq b \text{ و } f(x) \geq 0 \text{ } (\forall x \in [a, b])$$

$$\text{فإن } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$(b) \text{ إذا كان } a \leq b \text{ و } f(x) \leq 0 \text{ } (\forall x \in [a, b])$$

$$\text{فإن } \int_a^b f(x)dx \leq 0$$

$$(c) \text{ إذا كان } a \leq b \text{ و } f(x) \leq g(x) \text{ } (\forall x \in [a, b])$$

$$\text{فإن } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$(d) \text{ إذا كان } a \leq b \text{ فإن } \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$(8) \text{ العدد } \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \text{ يسمى القيمة المتوسطة لدالة } f \text{ بين}$$

a و b

(b) يوجد عدد c محصور بين a و b بحيث

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

$$(c) m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M \text{ حيث } m \text{ و } M \text{ هم القيمة}$$

الدنيا والقيمة القصوى للدالة f على $[a, b]$.

ملاحظة في الخاصية (8) ترتيب a و b غير مهم .

(V) بعض التقنيات

$$I = \int \frac{P(x)}{ax+b} dx \quad (1) \quad \text{نجري قسمة } P(x) \text{ على } ax+b$$

ثم نستعمل $\frac{u'}{u}$

$$I = \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx \quad (2)$$

(a) إذا كان $\Delta < 0$ نحدد الشكل القانوني $p(x) = ax^2+bx+c$

$$I = \int \frac{\alpha}{1+(u(x))^2} dx \quad \text{ونضع } t = u(x)$$

(b) إذا كان $\Delta > 0$ نعمل $P(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ ثم

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta} \right) \quad \text{ثم نستعمل } \frac{u'}{u}$$

(c) إذا كان $\Delta = 0$

$$I = \int \frac{1}{(x-\alpha)^2} dx = \int \frac{(x-\alpha)'}{(x-\alpha)^2} dx = \left[-\frac{1}{x-\alpha} \right]$$

$$I = \int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c} dx \quad (3) \quad \text{نجري قسمة } P(x) \text{ على}$$

$$ax^2+bx+c \quad \text{ثم نستعمل } \frac{u'}{1+(u)^2} \text{ أو } \frac{u'}{u}$$

$$I = \int \frac{P(x)}{\sqrt[n]{ax+b}} dx \quad \text{أو} \quad I = \int P(x) \sqrt[n]{ax+b} dx \quad (4)$$

$$t = \sqrt[n]{ax+b} \quad \text{نضع}$$

$$I = \int P(x) \sin(ax) dx \quad \text{أو} \quad I = \int P(x) \cos(ax) dx \quad (5)$$

$$I = \int P(x) e^{kx} dx \quad \leftarrow \text{المكاملة بالأجزاء ونضع}$$

$$\begin{cases} f(x) = P(x) \\ g'(x) = \cos(ax) \dots \end{cases}$$

$$I = \int P(x) \operatorname{Arc} \tan x dx \quad \text{أو} \quad I = \int P(x) \cos \ln(x) dx \quad (6)$$

$$\begin{cases} f(x) = \ln x \text{ (ou arctan)} \\ g'(x) = P(x) \end{cases} \quad \leftarrow \text{المكاملة بالأجزاء ونضع}$$

$$I = \int e^{kx} \sin(ax) dx \quad I = \int e^{kx} \cos(ax) dx \quad (7)$$

$$\leftarrow \text{المكاملة بالأجزاء مرتين ونجد } I = A + \alpha I$$

$$I = \int \frac{1}{ae^x+b} dx \quad (8)$$

$$I = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}(ae^x+b)} dx = \int \frac{e^{-x}}{a+be^{-x}} dx = \int \frac{u'}{u}$$

$$I = \int \frac{(\ln x)^r}{x} dx \quad (9)$$

$$I = \int \frac{(\ln x)^r}{x} dx = \int (\ln x)' (\ln x)^r dx = \left[\frac{1}{r+1} (\ln x)^{r+1} \right]$$

$$I = \int \frac{u(x)v(x)}{(w(x))^n} dx \quad (10)$$

$$\leftarrow \text{المكاملة بالأجزاء ونضع} \begin{cases} f'(x) = \frac{w'(x)}{(w(x))^n} \\ g(x) = \dots \end{cases}$$

(V) تطبيقات حساب التكامل

(1) حساب المساحات

(a) لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ ($a < b$) وليكن (E) الحيز المحصور بـ C_f و $(x'Ox)$ و $x=a$ و $x=b$.

$$A(E) = \left(\int_a^b |f(x)| dx \right) u.a \quad \text{هي مساحة الحيز } (E)$$

ملاحظة:

(* إذا كانت $f \geq 0$ يعني C_f يوجد فوق محور

$$A(E) = \left(\int_a^b f(x) dx \right) u.a \quad \text{الأفصيل فإن}$$

(* إذا كانت $f \leq 0$ يعني C_f يوجد تحت محور

$$A(E) = \left(- \int_a^b f(x) dx \right) u.a \quad \text{الأفصيل فإن}$$

(* إذا كانت تغير الإشارة مثلا فإن

$$A(E) = \int_a^\alpha f(x) dx - \int_\alpha^b f(x) dx$$

(b) لتكن f و g الدالتين متصلتين على $[a,b]$ ($a < b$) وليكن (E) الحيز المحصور بـ C_g و C_f و $x=a$ و $x=b$.

$$A(E) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) u.a \quad \text{هي مساحة الحيز } (E)$$

ملاحظة:

(* إذا كانت $f \geq g$ يعني C_f يوجد فوق C_g

$$A(E) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \quad \text{فإن}$$

(* إذا كانت $f \leq g$ يعني C_f يوجد تحت C_g

$$A(E) = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \quad \text{فإن}$$

(* إذا كان وضع C_f بالنسبة لـ C_g يتغير

فإن

$$A(E) = \int_a^\alpha (g(x) - f(x)) dx + \int_\alpha^b (f(x) - g(x)) dx$$

$$(c) \quad \text{إذا كان } \| \vec{i} \| = \alpha cm \quad \text{و} \quad \| \vec{j} \| = \beta cm$$

فإن وحدة قياس المساحات هو $u.a = \alpha\beta cm^2$

(2) حساب الحجم

(a) ليكن (S) مجسما (أنظر الشكل)

وليكن V حجم الجزئ المحصور بـ

$$(S) \text{ و المستويين } z=a \text{ و } z=b$$

$$S : [a,b] \rightarrow IR \quad \text{إذا كانت الدالة}$$

$$t \rightarrow S(t)$$

$$V = \left(\int_a^b S(t) dt \right) u.v \quad \text{فإن } [a,b] \text{ متصلة على}$$

($S(t)$ هي مساحة الجزئ تقاطع (S) و المستوى $z=t$)

(b) لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$

إذا دار C_f حول محور الأفصيل دورة

كاملة فإنه يولد مجسما يسمى مجسم دوران،

وحجم هذا المجسم هو

$$V = \left(\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right) u.v$$