الأستاذ: نجيب عثماني

سلسلة رقم 9:التكامل

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية الجهة الشرقية

تمرين1: أحسب التكاملات التالية : 1) $I=\int_2^4 3xdx$

2) $J=\int_0^1 (2x+3)\,dx$ (3 $K=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}dt$ (4

$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)d\theta$

تمرين2: أحسب التكاملات الآتية : $I_1=\int_0^2(2x-1)\,dx$

$I_2=\int_{-1}^1\left(x^4-4x^3+2\right)dx$ $I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$

$I_4=\int_0^{\ln 2}e^{2t}dt$ $I_5=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}te^{-t^2}dt$ $I_6=\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx$

$I_7=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx$ $I_8=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$

$I_9=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$

$I_{10}=\int_2^3\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$ $I_{11}=\int_0^1\sqrt{2x+1}dx$

$I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 xdx$

$I_{13}=\int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}dx$ $I_{14}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\cos 3x)\,dx$

$I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx$ $I_{16}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x+1}\right)dx$

$I_{17}=\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x}dx$ $I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx$

$I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx$ $I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^2\,dx$

$I_{21}=\int_1^e\frac{8x^9-4x+2}{x}dx$

تمرين3: أحسب التكامل $I=\int_0^3|x-1|dx$

تمرين4: نضع: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx$ $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 xdx$

1. أحسب $I+J$ و $I-J$
2. استنتج قيمة كل من I و J

تمرين5: نضع: $I=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ و

$J=\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx$

1. أحسب $I+J$ و $I-3J$
2. استنتج قيمة كل من I و J

تمرين6: احسب التكامل $I=\int_1^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$

تمرين7: احسب التكامل $I=\int_0^2\left|x^2-x-2\right|dx$

تمرين8: نضع $A=\int_1^e\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)dt$

$B=\int_1^e\left(1+\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$ أحسب $A+B$

تمرين9:: نضع: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\times\cos 2xdx$

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\times\cos 2xdx$

1. أحسب $I+J$ و $I-J$
2. استنتج قيمة كل من I و J

تمرين10: 1)تحقق أنه لكل t من $\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$\frac{t^2}{1+t}=t-1+\frac{1}{1+t}$$

2)أحسب التكامل I حيث: $I=\int_0^1\frac{t^2}{1+t}dt$

تمرين11: 1)تحقق أنه لكل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$:

$$\frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{9}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}$$

2)أحسب التكامل I حيث: $I=\int_3^5\frac{4x-5}{x^2-1}dx$

تمرين12:

1. حدد الأعداد الحقيقية : a و b علما أن :

$$\frac{x^3}{x^2+1}=ax+\frac{bx}{x^2+1}$$

2. استنتج قيمة التكامل: $I=\int_0^1\frac{x^3}{x^2+1}dx$

تمرين13: نضع: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx$

1. بين : $\cos^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$ (عملية الاخطاط)

2. استنتج حساب التكامل: I

تمرين14: بين أن : $\frac{1}{6}\le I=\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx\le\frac{1}{3}$

تمرين15: بين أن : $\frac{1}{e}\le\int_0^1 e^{-x^2}dt\le 1$

تمرين16: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}dx$

1)بين أن (u_n) تزايدية 2)بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{2}\le u_n\le 1$

تمرين17: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$f(x)=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

حدد القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;\ln 2]$

تمرين18: احسب التكامل $I=\int_0^{\ln 2}e^{4t}dt$

تمرين19: احسب التكاملات التالية : 1) $I=\int_0^{\pi}x\sin x dx$

2) $J=\int_0^{\ln 2}xe^x dx$ 3) $K=\int_1^e\ln x dx$

تمرين20: باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب التكاملات الآتية :

$I=\int_0^1 xe^{2x}dx$ و $J=\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

تمرين21: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع $\left\|\vec{i}\right\|=1cm$ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال : $[1;3]$ كالتالي : $f(x)=2x+1$

1)هل f دالة متصلة على قطعة $[1;3]$ ؟

2)أرسم (C_f) منحنى الدالة f على المجال $[1;3]$

3)أحسب مساحة حيز المستوى (Δ_f) المحصور بين (C_f) منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي $x=1$ و $x=3$

4)أحسب التكامل التالي : $I=\int_1^3 f(x)dx$

5)قارن المساحة والتكامل ؟

تمرين22: المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=x^2$

1)أرسم (C_f) 2)أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي: $x=1$ و $x=2$

تمرين23: المستوى المنسوب الى معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$ و $\left\|\vec{j}\right\|=3cm$ نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=x^2-2x$ أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي: $x=1$ و $x=3$

تمرين24: المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$ ونعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$f(x)=1-e^x$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي: $x=\ln 2$ و $x=\ln 4$

تمرين25: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ بحيث $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي:

$f(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}+e^{-x}$ و $g(x)=e^{-x}$

أحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنيي الدالتين f و g و المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي: $x=0$ و $x=\ln 2$ (إنشاء المنحنيين غير مطلوب)

تمرين26: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ بحيث : $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$ لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\sqrt{x}$ ليكن (C) منحناها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$

أحسب V حجم المجسم المولد بدوران (C) حول محور الأفاصيل على المجال $[0;4]$

تمرين27: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ بحيث : $\left\|\vec{i}\right\|=\frac{2}{3}cm$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$f(x)=\sqrt{x\left(e^x-1\right)}$

ليكن (C) منحناها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$

أحسب V حجم المجسم المولد بدوران (C) حول محور الأفاصيل على المجال $[0;1]$

ومنه : $I=\frac{1}{2}\pi$ وبالتالي : $V=\frac{1}{2}\pi\times\frac{8}{27}c^3m=\frac{4\pi}{27}c^3m$

تمرين28 : المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ مع $\left\|\vec{i}\right\|=1cm$ نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$f(x)=x-1+\frac{\ln x}{x}$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين الدالة f والمستقيمات التي معادلاتها على التوالي $y=x-1$ و $x=1$ و $x=e$

تمرين29 : الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ بحيث : $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f\left(x\right) = \sqrt{\ln x}$

ليكن $\left(C\right)$ منحناها في المعلم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

أحسب V حجم المجسم المولد بدوران $\left(C\right)$ حول محور الأفاصيل على المجال $\left[1;e\right]$

تمرين30 : الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ بحيث : $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f\left(x\right) = x\sqrt{1-lnx}$$

ليكن $\left(C\right)$ منحناها في المعلم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

أحسب V حجم المجسم المولد بدوران $\left(C\right)$ حول محور الأفاصيل على المجال $\left[1;e\right]$

تمرين31: باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب التكاملات الآتية :

$$J = \int_0^1 \left(x-1\right)e^{-x}dx \quad I = \int_0^{\pi} x\sin xdx$$

$$N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx \quad M = \int_1^e x\left(1-\ln x\right)dx \quad K = \int_0^1 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$$

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx \qquad R = \int_1^e x\ln xdx \qquad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos xdx$$

$$F = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1}\ln x\left(e^x+1\right)dx \text{ و } G = \int_0^1 3x^2\ln\left(x^2+1\right)dx \text{ (لاحظ أن: } \frac{x^4}{x^2+1} = x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\text{)}$$

تمرين32: المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ مع $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f\left(x\right) = e^x - 3$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي: $x = \ln 3$ و $x = \ln 6$

تمرين33: لمستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ مع $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f\left(x\right) = \ln x - 1$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي: $x = 1$ و $x = e$

تمرين34: بين أن :

1. بين أن : $\int_0^1 \left(e^x - e^{x^2}\right)dx \geq 0$
2. بين أن : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\cos t}dt \prec 0$
3. بين أن : $\frac{1}{2}\ln 2 \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{x}dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2$
4. بين أن : $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dt \leq 1$