## تمارين و حلول

### تمرين1

**1- أ/ تأكد أن** $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{1}{t(t+2)}$

**ب/ أحسب** $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}dt$

**2- أحسب** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

**3- نضع** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx \quad ; \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx$

**أحسب** $I+J$ **و** $I-J$ **ثم استنتج** $I$ **و** $J$

**1- أ/ تأكد أن** $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{1}{t(t+2)}$

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{t+2-t}{t(t+2)}=\frac{1}{t(t+2)}$$

**ب/ نحسب** $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}dt$

$$\int_1^2 \frac{1}{t(t+2)}dt=\int_1^2 \frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}dt=\left[\ln t-\ln(t+2)\right]_1^2=\ln 2-\ln 4+\ln 3=\ln\frac{3}{2}$$

**2- نحسب** $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

$$A=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-K$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=.........$$

**3- نضع** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx \quad ; \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx$

**نحسب** $I+J$

$$J+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$$

**نحسب** $I-J$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x dx=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx$$

$$I-J=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\cos 2x}{2}dx$$

$I-J=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ اذن $I-J=\frac{-\pi}{4}$

**نستنتج** $I$ **و** $J$

لدينا $I-J=\frac{-\pi}{4}$ و $I+J=\frac{\pi^3}{24}$ ومنه $I=\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{8}$ و $J=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$

## تمرين2

**نعتبر الدالة** $f$ **المعرفة على** $\mathbb{R}$ **بـ** $f(x)=e^x\left(1-e^x\right)$

**1- حدد** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

**2- أحسب** $f'(x)$ **و أعط جدول تغيرات** $f$ **و أنشئ** $C_f$

**3- حدد المساحة** $A_k$ **المحصور بين** $C_f$ **و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين** $x=0$ ; $x=k$ **حيث** $k$ **عدد حقيقي سالب ( يمكن اعتبار** $t=e^x$**)**

**4- حدد** $\lim_{k\to-\infty} A_k$

$$f(x)=e^x\left(1-e^x\right)$$

**4- نحدد** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-e^x\right)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x\left(1-e^x\right)=0$$

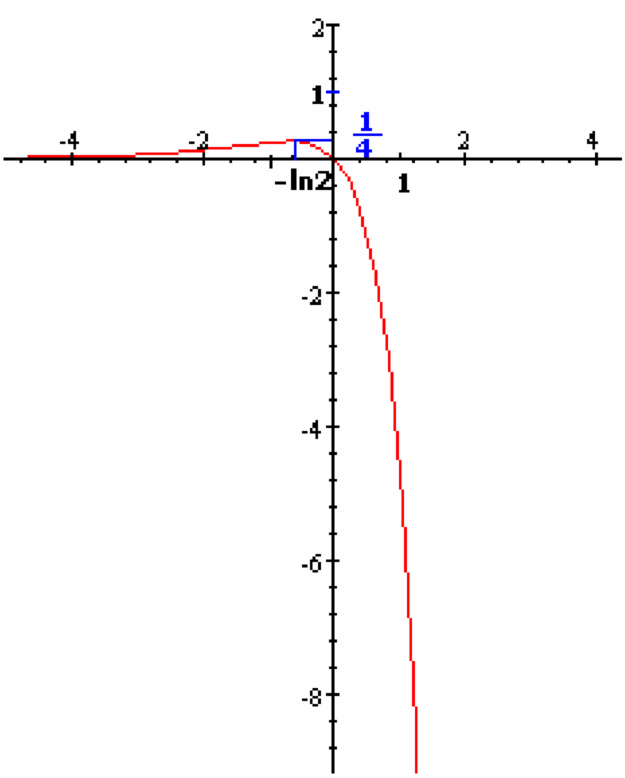
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}\left(1-e^x\right)=-\infty \quad ;$$

**5- أنسب** $f'(x)$ **و نعطي جدول تغيرات** $f$ **و أنشئ** $C_f$

$$f'(x)=\left[e^x-e^{2x}\right]'=e^x-2e^{2x}=e^x\left(1-2e^x\right)$$

**جدول التغيرات**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $f$ | 0 | $\nearrow$ | $\frac{1}{4}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |




**-6 نحدد المساحة** $A_k$

$$A_k = \int_k^0 f(x)\,dx = \int_k^0 e^x - e^{2x}\,dx$$

$$A_k = \left[ e^x - \frac{1}{2}e^{2x} \right]_k^0 = \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2}e^{2k}$$

**-4 حدد** $\lim\limits_{k \to -\infty} A_k$

$$\lim_{k \to -\infty} A_k = \lim_{k \to -\infty} \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2}e^{2k} = \frac{1}{2}$$