

درس : الجداء المتجهي

I. توجيه الفضاء – ثلاثي الأوجه – الأساس و المعلم الموجهان:

01. ثلاثي الأوجه : Trièdre

1. تعريف:

[OI] و [OJ] و [OK] ثلاثة أنصاف مستقيمت غير مستوائية من الفضاء تكون في هذا الترتيب (الترتيب مهم) ثلاثي أوجه يرمز له باختصار (OI,OJ,OK) أما أنصاف المستقيمت تسمى أحرفه. ([OI] حرف لثلاثي الأوجه).

02. رجل أمبير:

1. تقديم:

(OI,OJ,OK) ثلاثي أوجه ؛ نفترض شخص خيالي حيث : قدماه في النقطة O ومحمول على الحرف الثالث [OK].



وينظر إلى الحرف الأول [OI].

نهتم هل يده اليسرى توافق منحى الحرف الثاني [OJ].

هذا الشخص يسمى رجل أمبير Bonhomme d'Ampère

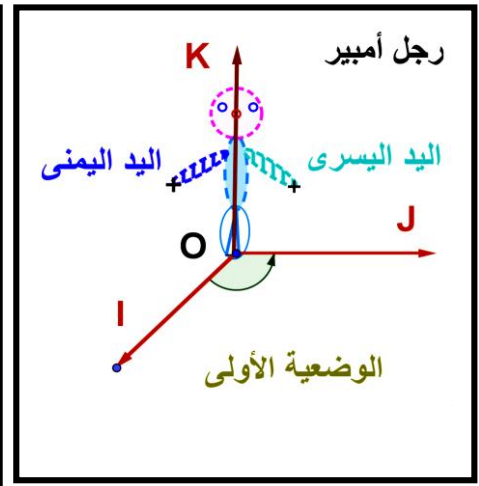
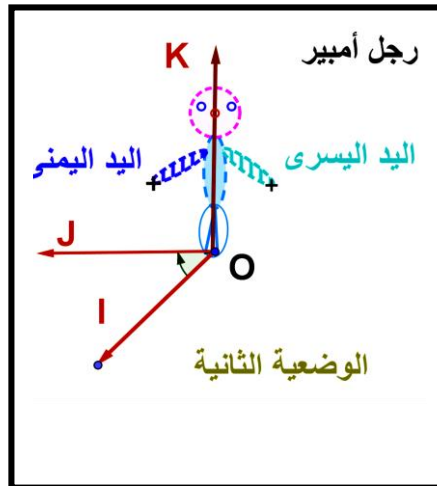
هناك وضعيتين للحرف [OJ]. (أنظر الوضعية رقم 1 ثم رقم 2)

Gravure de 1825 par [Ambroise Tardieu](#).

Données clés

Naissance [20 janvier 1775](#)
[Lyon \(France\)](#)Décès [10 juin 1836](#) (à 61 ans)
[Marseille \(France\)](#)Nationalité [Française](#)Champs [Mathématiques, physique](#)Institutions [École polytechnique](#)
[Collège de France](#)Renommé pour [Théorème d'Ampère](#)

Signature



03. الأساس و المعلم الموجهان:

1. مفردات:

الوضعية التي يكون رجل أمبير محمول على الحرف [OK] و قدماه في O و ينظر إلى الحرف [OI] و الحرف [OJ] على يساره

نسمى ثلاثي الأوجه (OI,OJ,OK) مباشر أو موجب (هذه الوضعية التي تهمننا في هذا الدرس)

الوضع الآخر لثلاثي الأوجه (OI,OJ,OK) غير مباشر أو سالب

أساس في الفضاء $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم في الفضاء نضع : $\vec{i} = \vec{OI}$ و $\vec{j} = \vec{OJ}$ و $\vec{k} = \vec{OK}$ إذن $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المثلوث (غير مستوائية) المثلوث

الأساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشر إذا كان ثلاثي الأوجه (OI,OJ,OK) مباشر .

في هذه الحالة المعلم $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ يسمى معلم مباشر و نقول أن الفضاء موجه توجيهها مباشرة (أو موجبا)

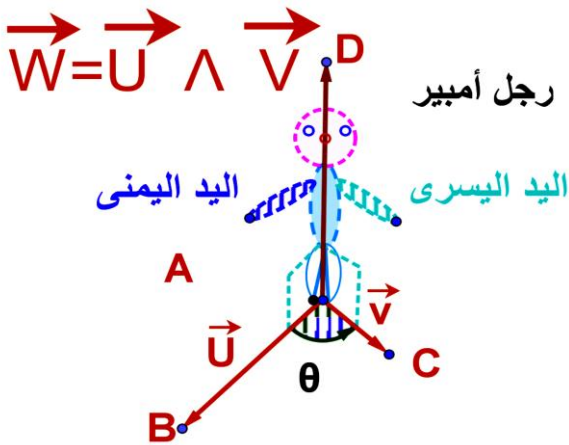
II. الجداء المتجهي لمتجهتين من الفضاء – تأويل منظمه:

01. تعريف هندسي للجداء المتجهي :

1. تعريف :

- الجداء المتجهي للمتجهين $\vec{u} = \overline{AB}$ و $\vec{v} = \overline{AC}$ متجهتين من الفضاء الموجه. تحقق ما يلي.
- الجداء المتجهي للمتجهين \vec{u} و \vec{v} في هذا الترتيب (أي الترتيب مهم) هو المتجهة $\vec{w} = \overline{AD}$ و التي نرمز لها ب: $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ التي تحقق ما يلي.
 - إذا كانت \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين فإن: $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
 - إذا كانت \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين فإن: $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ تحقق
 - \vec{w} متعامد مع كل من \vec{u} و \vec{v} (أي $\vec{w} \perp \vec{u}$ و $\vec{w} \perp \vec{v}$)
 - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ أساس مباشر. ($\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$) أساس مباشر أو ثلاثي أوجه مباشر).
 - حيث $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin \theta$ قياس للزاوية الهندسية BAC .

2. مثال 1 :



3. مثال 2 :

نضع : $\|\vec{u}\| = 2$ و $\|\vec{v}\| = 5$ و $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$ أحسب $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

4. مثال 3 :

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ حيث:

أ. $AB = 1$. أوجد: $\overline{AB} \wedge \overline{HG}$ ثم $\overline{AB} \wedge \overline{AD}$

ب. $AB = 2$. أوجد: $\overline{AB} \wedge \overline{HG}$ ثم $\overline{AB} \wedge \overline{AD}$

جواب:

أ. نجد:

$$\overline{AB} \wedge \overline{AD} = 1 \times 1 \times \overline{AE} \quad (\text{لأنهما مستقيمتان})$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{HG} = \vec{0}$$

ب. نجد:

$$\overline{AB} \wedge \overline{AD} = 2 \times 2 \times \overline{AE} \quad (\text{لأنهما مستقيمتان})$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{HG} = \vec{0}$$

5. نتائج:

\vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء ، لدينا:

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \quad \text{و} \quad \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \quad \text{و} \quad \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

\vec{u} و \vec{v} غير منعدمتين و متعامدتين ($\vec{u} \perp \vec{v}$) المثلوث: ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}$) أساس متعامد مباشر.

\vec{u} و \vec{v} غير منعدمتين و متعامدتين ($\vec{u} \perp \vec{v}$) و $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ المثلوث: ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}$) أساس متعامد منظم مباشر.

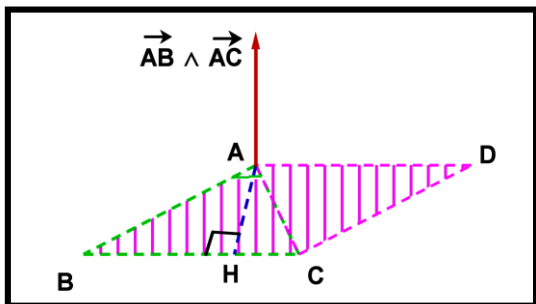
المستوى المار من النقطة A و الموجه بالمتجهتين الغير المستقيمتين \vec{u} و \vec{v} أي ($\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$) فإن المتجهة $\vec{u} \wedge \vec{v}$ منتظمة

على المستوى \mathcal{P} ومنه: ($\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) = \mathcal{P}(A, \vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v})$).

\vec{u} و \vec{v} متجهتان مستقيمتان من الفضاء يكافئ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

تأويل منظم الجداء المتجهي لمتجهتين :

02



1. خاصية:

$$\bullet S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ هي مساحة مثلث } ABC$$

$$\bullet S_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ هي مساحة متوازي الأضلاع}$$

تخالفية و خطانية الجداء المتجهي في الفضاء:

03

1. خاصية:

 \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} ثلاث متجهات من الفضاء و k من \mathbb{R} لدينا:

 \bullet التخالفية (Antisymétrie)

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

 \bullet خطانية: Bilinéarité

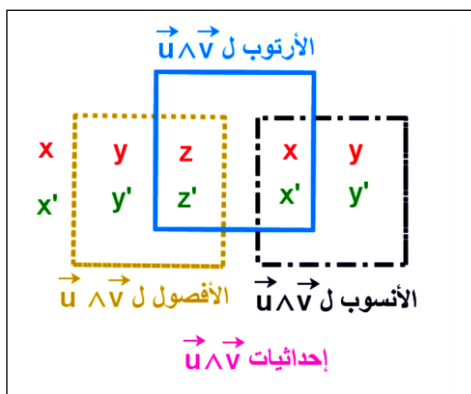
$$\begin{cases} \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ (k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) \end{cases}$$

III. إحداثيات الجداء المتجهي لمتجهتين بالنسبة لأساس م.م.م. مباشر.

1. خاصية:

الفضاء منسوب إلى أساس م. م. مباشر $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. لتكن $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ متجهتين من الفضاء لدينا:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \Delta_x \vec{i} - \Delta_y \vec{j} + \Delta_z \vec{k} \end{aligned}$$

2. مثال: تحقق بأن: $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ 3. تقنية إيجاد إحداثيات $\vec{u} \wedge \vec{v}$:
نستعمل الوضعية التالية :

IV. مسافة نقطة عن مستقيم في الفضاء:
1. خاصية:

$D(A, \vec{u})$ مستقيم المار من النقطة A من الفضاء و الموجه بمتجهة \vec{u} (غير منعدمة)، M نقطة من الفضاء؛ مسافة النقطة M عن المستقيم $D(A, \vec{u})$ هي: $d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

2. مثال:

أحسب مسافة النقطة $M(1, 3, 0)$ عن المستقيم (D) حيث:

$$(D): \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \text{ - أ}$$

$$(D): \frac{x+1}{3} = y = \frac{1-z}{2} \text{ - ب}$$

جواب:

$$\text{أ - } D(A(0, 3, -1), \vec{u}(2, -1, 1)) \text{ إذن } \|\vec{u}\| = \sqrt{6} \text{ و } \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 3-3 \\ 0+1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \text{ ومنه } \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{3}$$

$$\text{إذن: } d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ب - } D(A(-1, 0, 1), \vec{u}(3, 1, -2)) \text{ إذن } \|\vec{u}\| = \sqrt{6} \text{ و } \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 3-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -5\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k} \text{ إذن } \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{75}$$

$$\text{وبالتالي: } d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{1050}}{14}$$

V. إضافات تهم الجداء المتجهي :

01. الجداء المتجهي باستعمال " قاعدة اليد اليمنى "

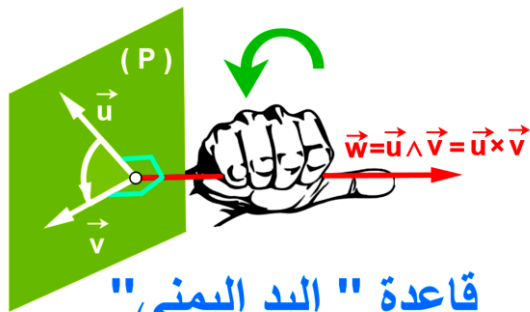
الجداء المتجهي للمتجهين \vec{u} و \vec{v} (غير مستقيمتين) في هذا الترتيب هي :
المتجهي $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}$ العمودية على المستوى (P) الموجه ب \vec{u} و \vec{v}

حيث اتجاه \vec{w} محددة باستعمال " قاعدة اليد اليمنى "

- نغلق اليد اليمنى حيث إغلاق الأصابع يكون تبعا للاتجاه الزاوية من \vec{u} إلى \vec{v} (مع أخذ أصغر زاوية من \vec{u} إلى \vec{v}) (أنظر الشكل)
- ثم نضع حافة الجنبية لهذه اليد المغلقة (التي ليس فيه الأصبع المسمى الإبهام) على المستوى (P) . (أنظر الشكل)
- اتجاه \vec{w} (أو أيضا $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}$) هو اتجاه الأصبع المسمى الإبهام . (أنظر الشكل)

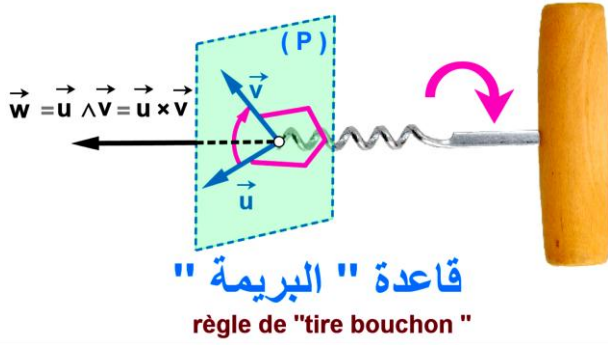
02. الجداء المتجهي باستعمال " بريمة إزالة سداة القنينة " règle « de tire bouchon »

بريمة أو بزال (آلة لولبية لنزع سداة القنينة)



règle de " la main droite "

درس : الجداء المتجهي



- نضع رأس البريمة في نقطة بداية انطلاق المتجهتين و بشكل عمودي على المستوى (P) الموجه ب \vec{u} إلى \vec{v} . (أنظر الشكل)
- نقوم بعملية دوران للبريمة تبعا للاتجاه الزاوية من \vec{u} إلى \vec{v} (مع أخذ أصغر زاوية من \vec{u} إلى \vec{v}) (أنظر الشكل)
- اتجاه \vec{w} (أو أيضا $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}$) هو : اتجاه تقدم خروج رأس البريمة من الجانب الأخر للمستوى (P). (أنظر الشكل)

استعمال مجال مغناطيسي .03

