

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 13 في درس الجداء المتجهي

القدرات المنتظرة

- حساب مساحة مثلث باستعمال الجداء المتجهي
- تحديد معادلة مستوى محدد بثلاثة نقط غير مستقيمية
- تطبيق الجداء المتجهي في حل مسائل هندسية و فزيائية

محتوى الدرس

- توجيه الفضاء-ثلاثي الأوجه-المعلم و الأساس الموجهان
- تعريف هندسي للجداء المتجهي و تأويل منظمه
- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي لمتجهتين
- استقامية متجهتين
- مسافة نقطة عن مستقيم ومساحة مثلث و متوازي الأضلاع

3) الأساس و المعلم الموجهان:

تعريف: ليكن $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلما في الفضاء. نضع $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ و

$$\vec{j} = \overrightarrow{OJ} \text{ و } \vec{k} = \overrightarrow{OK}$$

نقول إن الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشر إذا كان ثلاثي الأوجه

$(OI; OJ; OK)$ مباشرا.

نقول إن المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشر إذا كان الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشرا.

نقول إن الفضاء موجه توجيهها مباشرا (أو موجبا) إذا كان منسوبا لمعلم مباشر.

فيما تبقى من فقرات الدرس. نعتبر أن الفضاء موجه توجيهها مباشرا

II. تعريف هندسي للجداء المتجهي و تأويل منظمه:

تعريف: لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين في الفضاء الموجه .

الجداء المتجهي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} في هذا الترتيب، هو المتجهة التي

نرمز لها بالرمز $\vec{u} \wedge \vec{v}$ و المعرفة بما يلي:

$$1. \text{ إذا كانت } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتين فان: } \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

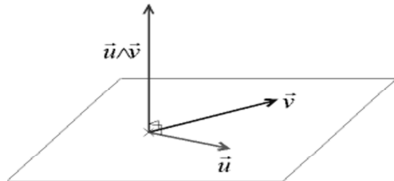
$$2. \text{ إذا كانت } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ غير مستقيمتين فان } \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \text{ بحيث:}$$

$$\vec{w} \perp \vec{u} \text{ و } \vec{w} \perp \vec{v}$$

$$\bullet (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \text{ أساس مباشر,}$$

$$\bullet \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta$$

حيث θ قياس للزاوية الهندسية BAC مع $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



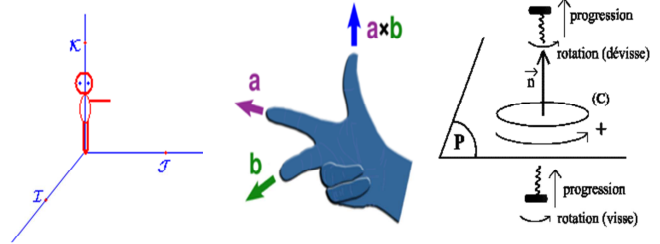
I. توجيه الفضاء-ثلاثي الأوجه-المعلم و الأساس

الموجهان:

1) ثلاثي الأوجه:

تعريف: ثلاثة أنصاف مستقيمات في الفضاء لها نفس الأصل O و غير مستوائية تكون في هذا الترتيب ثلاثي أوجه، نرمز له بالرمز $(Ox; Oy; Oz)$. و $[Ox]$ و $[Oy]$ و $[Oz]$ تسمى أحرف ثلاثي الأوجه $(Ox; Oy; Oz)$.

2) توجيه الفضاء:



ليكن $(Ox; Oy; Oz)$ ثلاثي أوجه: رجل أمبير لثلاثي الأوجه

$(Ox; Oy; Oz)$, هو شخص خيالي محمول على الحرف $[Oz]$,

قدماه في

النقطة O , و ينظر إلى الحرف $[Ox]$, بالنسبة لرجل أمبير هناك

وضعتان للحرف $[Oy]$.

الحرف $[Oy]$ عن يساره و الحرف $[Oy]$ عن يمينه

اصطلاحيا، نقول إن الثلاثي الأوجه $(Ox; Oy; Oz)$ مباشر (أو

موجب) إذا كان رجل أمبير محمولا على $[Oz]$ و قدماه في النقطة O

و ينظر إلى الحرف $[Ox]$ و يكون الحرف $[Oy]$ عن يساره.

مثال :

أحسب $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ إذا علمت أن: $\left(\vec{u}; \vec{v}\right) = \frac{\pi}{3}$ و $\|\vec{u}\| = 1$ و $\|\vec{v}\| = 3$

الجواب: $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta = 1 \cdot 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

نتائج: لكل متجهة \vec{u} من الفضاء، لدينا: $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ و $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$ و $\vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

III. خاصيات الجداء المتجهي

خاصية: لتكن \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} ثلاث متجهات من الفضاء و k عددا حقيقيا، لدينا:

$$\vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$$

خاصية: تكون \vec{u} و \vec{v} متجهتين مستقيمتين في الفضاء إذا وفقط إذا كان: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

مثال ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا و M و N النقطتين المعرفتين

$$\text{بما يلي: } \vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE} \text{ و } \vec{AN} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$(1) \text{ بين أن: } \vec{NG} = \vec{AD} + \vec{AE} + \frac{3}{2}\vec{AB} \text{ و } \vec{NM} = \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$(2) \text{ أحسب: } \vec{NM} \wedge \vec{NG}$$

(3) ماذا تستنتج؟

$$\text{أجوبة: } (1) \vec{NM} = \vec{AM} - \vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$\vec{NG} = \vec{BG} - \vec{BN} = \vec{AH} - (\vec{AN} - \vec{AB})$$

$$\vec{NG} = \vec{AD} + \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AB} = \vec{AD} + \vec{AE} + \frac{3}{2}\vec{AB}$$

$$\vec{NM} \wedge \vec{NG} = \left(\frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB}\right) \wedge \left(\vec{AD} + \vec{AE} + \frac{3}{2}\vec{AB}\right) (2)$$

لدينا $\vec{AD} \wedge \vec{AD} = \vec{0}$ و $\vec{AE} \wedge \vec{AE} = \vec{0}$ و $\vec{AB} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$ اذن:

$$\vec{NM} \wedge \vec{NG} = \frac{1}{3}(\vec{AD} \wedge \vec{AE}) + \frac{1}{2}\vec{AB} \wedge \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} \wedge \vec{AE} = \vec{0}$$

(3) نستنتج أن المنجهتين \vec{NG} و \vec{NM} مستقيمتين

وبالتالي النقط M و N و G مستقيمية

IV. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي لمتجهتين

إحداثيات الجداء المتجهي بالنسبة لأساس متعامد منظم مباشر:

خاصية: الفضاء منسوب إلى أساس متعامد منظم مباشر $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء، إحداثياتهما $\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$ على التوالي.

$(X; Y; Z)$ متلوث إحداثيات الجداء المتجهي $\vec{u} \wedge \vec{v}$ بحيث:

$$Z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \text{ و } Y = -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \text{ و } X = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

مثال: $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ أحسب $\vec{u} \wedge \vec{v}$

الجواب: $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(2;1;2)$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

تمرين 1: $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ أحسب $\vec{u} \wedge \vec{v}$

الجواب: $\vec{u}(1;2;1)$ و $\vec{v}(3;-2;-1)$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

V. تطبيقات

1) خاصية: مساحة مثلث - مساحة متوازي الأضلاع:

ليكن ABC مثلثا. مساحة المثلث ABC هي: $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع. مساحة $ABCD$ هي:

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

مثال: نعتبر في الفضاء النقط $A(0;1;2)$ و $B(1;1;0)$ و $C(1;0;1)$

1. حدد إحداثيات المتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمية

2. أحسب مساحة المثلث ABC

3. حدد معادلة ديكرتية للمستوى (ABC) .

الجواب (1): $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

$$\vec{AB}(1;0;-2) \text{ و } \vec{AC}(1;-1;-1)$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$ ومنه النقط A و B و C غير مستقيمية

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| (2)$$

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \text{ ومنه:}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k} (3) \text{ متجهة منظمية على المستوى } ABC$$

نعلم أن معادلة المستوى ABC تكتب على الشكل:

$$ax + by + cz + d = 0$$

و نعلم أن $(-2; -1; -1)$ متجهة منظمية عليه اذن:

$$c = -1 \text{ و } b = -1 \text{ و } a = -2$$

$$\text{ومنه: } -2x - 1y - 1z + d = 0 (ABC)$$

و نعلم أن: $A(0;1;2) \in (P)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة:

$$\text{يعني } 0 - 1 - 2 + d = 0 \text{ يعني } d = 3$$

$$\text{وبالتالي: } -2x - 1y - 1z + 3 = 0 (ABC)$$

$$\text{يعني: } 2x + y + z - 3 = 0 (ABC)$$

تمرين 2: نعتبر النقط $A(1;1;0)$ و $B(2;3;4)$ و $C(-1;0;3)$

1. حدد إحداثيات المتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ وبين أن النقط A و B و C غير مستقيمية

2. أحسب مساحة المثلث ABC

تمرين 3: أحسب مسافة النقطة $B(0;1;2)$ عن المستقيم (D)

المعرف بما يلي:

$$(D): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}$$

الجواب: نبحث عن نقطة يمر من المستقيم ومتجهة موجهة له :

$$(D): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 + 2t \end{cases}$$

لدينا $A(1;2;0) \in (D)$ و $\vec{u}(1;-1;2)$ متجهة موجهة ل (D)

$$B(0;1;2) \quad \vec{u}(1;-1;2) \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB}(-1;-1;2)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$d(B;D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{0^2 + 4^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$$

تمارين للبحث

التمرين 1: في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر الفلكة (S) التي معادلتها

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 - 2y - 5 = 0$$

1. حدد Ω مركز الفلكة (S) و شعاعها r .

2. نعتبر النقطتين $A(-1;2;1)$ و $B(2;-1;1)$, أحسب مساحة

المثلث $AB\Omega$.

3. حدد معادلة ديكراتية للمستوى المماس للفلكة في النقطة A .

التمرين 2: الفضاء \mathcal{E} منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;0;-1)$ و $B(1;3;-1)$ و

$$C\left(-\frac{1}{3}; 1; 0\right)$$

1. حدد $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ ثم استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية.

2. حدد معادلة ديكراتية للمستوى (P) المعروف بالنقط A و B و C .

3. لتكن الفلكة (S) ذات الشعاع $r=1$ و المركز $\Omega(0,0,1)$.

أ. أعط معادلة ديكراتية للفلكة (S) .

ب. بين أن الفلكة (S) مماسة للمستوى (P) .

ج. حدد مثلث إحداثيات نقطة التماس.

التمرين 3: في الفضاء \mathcal{E} منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط $A(5;-1;2)$ و $B(1;-3;-2)$ و

$$C(-2;-1;2)$$

1) أحسب $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ ثم استنتج مساحة المثلث ABC .

2) أحسب $\left| \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$.

3) أحسب مسافة النقطة B عن المستقيم (AC) .

3. حدد معادلة ديكراتية للمستوى (ABC) .

الجواب (1): $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

$$\overrightarrow{AC}(-2; -1; 3) \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB}(1; 2; 4)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ ومنه النقط A و B و C غير مستقيمية

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \quad (2)$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{10^2 + (-11)^2 + 3^2} = \sqrt{230}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{230}}{2}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 10\vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}$ متجهة منظمية على المستوى

ABC

نعلم أن معادلة المستوى ABC تكتب على الشكل :

$$ax + by + cz + d = 0$$

و نعلم أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(10; -11; 3)$ متجهة منظمية عليه إذن :

$$c = 3 \quad \text{و} \quad b = -11 \quad \text{و} \quad a = 10$$

ومنه : $(ABC) \quad 10x - 11y + 3z + d = 0$

و نعلم أن : $A(1;1;0) \in (P)$ إذن احداثيات A تحقق المعادلة :

$$10 - 11 + 0 + d = 0 \quad \text{يعني} \quad d = 1$$

وبالتالي : $(ABC) \quad 10x - 11y + 3z + 1 = 0$

2) مسافة نقطة عن مستقيم:

خاصية: مسافة نقطة M من الفضاء عن المستقيم (D) المار

من النقطة A و \vec{u} متجهة موجهة له هي : $d(M;D(A;\vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

مثال: أحسب مسافة النقطة $M(2;1;1)$ عن المستقيم (D) المعروف

بما يلي:

$$(D): \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4t \end{cases}$$

الجواب: نبحث عن نقطة يمر من المستقيم ومتجهة موجهة له :

$$(D): \begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = 1 - 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 + 4t \end{cases}$$

لدينا $A(1;1;0) \in (D)$ و $\vec{u}(0;-3;4)$ متجهة موجهة ل (D)

$$\overrightarrow{AM}(1;0;1) \quad \text{و} \quad \vec{u}(0;-3;4)$$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$d(M;D(A;\vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-3)^2}}{\sqrt{0^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{34}}{5}$$