ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

درس الحساب المتجهي

تعريف هندسي للجداء المتجهي: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين في الفضاء الموجه.الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هذا الترتيب, هو المتجهة التي نرمز لها بالرمز $\vec{u}\wedge\vec{v}$ و المعرفة بما يلي:

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان: $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فان $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$ بحيث:

$\vec{w}\perp\vec{u}$ و $\vec{w}\perp\vec{v}$ و $\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ أساس مباشر,

يمكننا تحديد منحى المتجهة $\vec{u}\wedge\vec{v}$ باستعمال تقنية رجل أبير واليد حيث $\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin\theta$ قياس للزاوية الهندسية θ مع BAC $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

- مساحة المثلث ABC هي: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.
- مساحة متوازي أضلاع. $ABCD$ هي: $S_{ABCD}=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$
- لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء و k عددا حقيقيا,لدينا:
- $\vec{v}\wedge\vec{u}=-\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$ و $\vec{u}\wedge\left(k\vec{v}\right)=k\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$

$\left(k\vec{u}\right)\wedge\vec{v}=k\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$ و $\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$$

- تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين مستقيميتين إذا وفقط إذا كان: $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
- لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء, إحداثياتهما $(x;y;z)$ و $(x';y';z')$ على التوالي.

$(X;Y;Z)$ مثلوث إحداثيات الجداء المتجهي $\vec{u}\wedge\vec{v}$ بحيث:

$$X=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \text{ و } Y=\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \text{ و } Z=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

مثال: $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ أحسب $\vec{u}\wedge\vec{v}$

$\vec{u}(1;2;1)$ و $\vec{v}(3;-2;-1)$

الجواب $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=4\vec{j}-8\vec{k}$$

طريقة : لتحديد معادلة ديكارتية لمستوى $ABC:ax+by+cz+d=0$

يمكننا أن نلاحظ أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ هي متجهة منظميه على المستوى ABC

مثال: نعتبر في الفضاء النقط $A(0;1;2)$ و $B(1;1;0)$ و $C(1;0;1)$

1. حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمية
2. أحسب مساحة المثلث ABC
3. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

الجواب :(1 $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$

$\overrightarrow{AB}(1;0;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-1;-1)$

$\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}-1\vec{j}-1\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ ومنه النقط A و B و C غير مستقيمية

(2 $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{6}$$

ومنه : $S_{ABC}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(3 $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}-1\vec{j}-1\vec{k}$ متجهة منظمية على المستوى ABC ونعلم أن معادلة المستوى ABC تكتب على الشكل : $ax+by+cz+d=0$

و نعلم أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-2;-1;-1)$ متجهة منظميه عليه اذن : $a=-2$ و $b=-1$ و $c=-1$

ومنه : $(ABC)\ -2x-1y-1z+d=0$

و نعلم أن: $A(0;1;2)\in(P)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة : يعني $0-1-2+d=0$ يعني $d=3$

وبالتالي : $(ABC)\ -2x-1y-1z+3=0$

يعني : $(ABC)\ 2x+y+z-3=0$

حساب مسافة نقطة عن مستقيم:

مسافة نقطة M من الفضاء عن المستقيم (D) المار من النقطة A و $\vec{u}$ متجهة موجهة له هي: $d\left(M;D\left(A;\vec{u}\right)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

مثال : أحسب مسافة النقطة $M\ (2;1;1)$ عن المستقيم (D) المعرف بما يلي: $(D):\begin{cases} x=1 \\ y=1-3t\ (t\in\mathbb{R}) \\ z=4t \end{cases}$

الجواب : نبحث عن نقطة يمر من المستقيم ومتجهة موجهة له :

$(D):\begin{cases} x=1+0t \\ y=1-3t\ (t\in\mathbb{R}) \\ z=0+4t \end{cases}$ ولدينا $A(1;1;0)\in(D)$

و $\vec{u}(0;-3;4)$ متجهة موجهة ل (D) و لدينا $\overrightarrow{AM}(1;0;1)$ و $\vec{u}(0;-3;4)$

$$\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}$$

$$d\left(M;D\left(A;\vec{u}\right)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2+(-3)^2}}{\sqrt{0^2+(-3)^2+4^2}}=\frac{\sqrt{34}}{5}$$