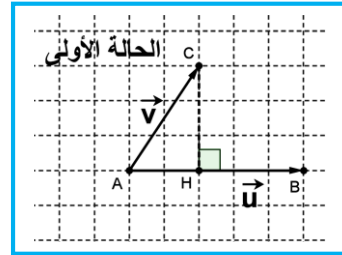
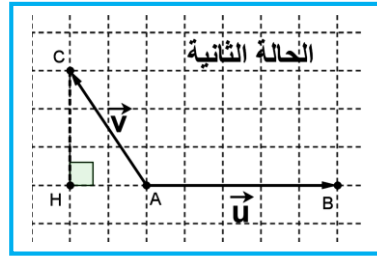




درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

I. الجداء السلمي في الفضاء:



لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين من الفضاء المتجهي V_3 و A و B و C نقط من الفضاء (صح) حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

الجداء السلمي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} هو:

- في الحالة 1 هو: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$

- في الحالة 2 هو: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

01. تعريف:

ليكن $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء V_3 و H المسقط العمودي ل C على (AB) .

الجداء السلمي ل \vec{u} و \vec{v} ويرمز له ب $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ هو:

∥ العدد الحقيقي $AB \times AH$ إذا كان \overrightarrow{AH} و \overrightarrow{AB} لهما نفس المنحى

∥ العدد الحقيقي $-AB \times AH$ إذا كان \overrightarrow{AH} و \overrightarrow{AB} لهما منحيان \neq

∥ إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (الجداء السلمي منعدم)

02. ملاحظات:

أ- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB = AB^2 \geq 0$

ب- $\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2$ يسمى المربع السلمي ل \vec{u} ويرمز له ب: $\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2$.

ج- العدد الحقيقي الموجب: $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$ يسمى منظم المتجهة \vec{u} ويرمز له ب: $\|\vec{u}\| = \sqrt{u^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = AB$

د- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u}$

هـ- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ أو $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

و- $(\vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتان}) \Leftrightarrow \|\vec{u} \cdot \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

03. خاصيات:

\vec{u} و \vec{v} و \vec{w} متجهات من V_3 و α من \mathbb{R} لدينا:

أ- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (تماثلية الجداء السلمي).

ب- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
 $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$
 $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$

(خطانية الجداء السلمي)

ج- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

د- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

هـ- $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

04. تمرين تطبيقي :

ليكن ABCD رباعي أوجه منتظم (كل وجه هو مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه هو a).

1. بين أن : ضلعين متقابلين هما متعامدين (مثال الضلع المقابل للضلع [AB] هو الضلع [DC]).

جواب :

$$1. \text{ نبين أن : } \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$$

$$(1) . \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = a \times a \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$$

$$(2) . \vec{AB} \cdot \vec{AD} = AB \times AD \cos(\vec{AB}, \vec{AD}) = a \times a \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$$

ومنه :

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC})$$

$$= \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

$$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

(حسب (1) و (2))

وبالتالي : $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$

خلاصة : $(AB) \perp (CD)$

بنفس الطريقة نبين أن : $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$ و $\vec{BC} \cdot \vec{AD} = 0$

II. معلم متعامد ممنظم – أساس متعامد ممنظم.

01. تعاريف:

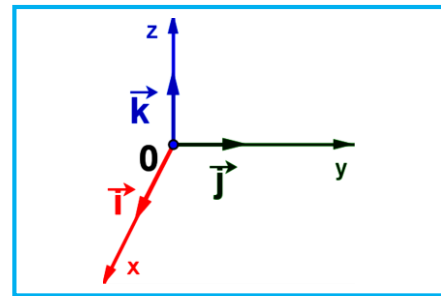
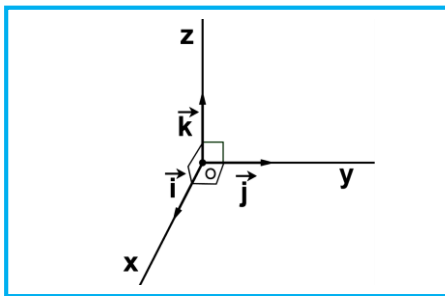
/// $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 يكافئ \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} غير مستوائية من الفضاء $(\det(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \neq 0)$

/// أخذ نقطة O من الفضاء الرباعي $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ يسمى معلم في الفضاء،

نقول أن الفضاء منسوب إلى المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أو أيضا الفضاء مزود بالمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

/// $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 هو أساس متعامد ممنظم يكافئ $\vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ و $\|\vec{j}\| = \|\vec{i}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

و في هذه الحالة المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ يسمى معلم متعامد ممنظم



III. تحليلية الجداء السلمي في الفضاء

باقي فقرات الدرس المتبقية الفضاء نرسم له ب (E) و منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و $\vec{u}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

. $\vec{v}(x', y', z') = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ متجهتين من الفضاء V_3 .

$\vec{u}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{v}(x', y', z') = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ متجهتين من (P)

درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

- 1 أحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ بدلالة x و y و z و x' و y' و z' ثم $\|\vec{u}\|$ بدلالة x و y و z .
- 2 أعط شرط ضروري وكافي لتعامد \vec{u} و \vec{v} بدلالة x و y و z و x' و y' و z' .
- 3 أحسب المسافة: AB مع $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$.
- 4 أعط الخاصية:
01. خاصيات:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz' \text{ هو } \vec{v} \text{ و } \vec{u} \text{ الجداء السلمي ل}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ هو : منظم المتجهة } \vec{u}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \text{ هي : المسافة بين } A \text{ و } B$$

02. مثال :

نعتبر $\vec{u}(1, 2, 3)$ و $\vec{v}(5, 7, 4)$ متجهتين من الفضاء و $A(1, 5, 7)$ و $B(2, 9, 8)$ 1. أحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$ ثم المسافة AB .

لدينا :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 5 + 2 \times 7 + 3 \times 4 = 31 \quad \bullet$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \quad \text{و} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{88} \quad \bullet$$

$$AB = \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18} \text{ ومنه : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 9-5 \\ 8-7 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ لدينا : } \bullet$$

$$\text{خلاصة : } \vec{u} \cdot \vec{v} = 31 \quad \text{و} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{14} \quad \text{و} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{88} \quad \text{و} \quad AB = \sqrt{18}$$

IV. مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء حيث : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ مع $k \in \mathbb{R}$

01. خاصية:

نقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ و $\vec{u}(a, b, c)$ متجهة غير منعدمة من الفضاء و k من \mathbb{R} ؛ مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء حيث:

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k \text{ هي مستوى معادلته تكتب على شكل : } ax + by + cz + d = 0$$

02. مثال: $A(1, 1, 1)$ و $\vec{u}(0, 1, 0)$ نحدد (P) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء (مح) حيث : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0 \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = 0$$

درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

خلاصة : المجموعة (P) هي المستوى الذي معادلته : $y = 1$

V. مستوى معرف بنقطة و متجهة منظمة عليه:

01. متجهة منظمة على مستوى:

أ- تعريف:

متجهة منظمة على مستوى (P) هي: كل متجهة \vec{n} غير منعدمة و يكون اتجاهها عموديا على المستوى (P).

ب- نتيجة:

\vec{n} منظمة على المستوى (P) يكافئ أن: \vec{n} متعامدة مع متجهتين موجهتين \vec{u} و \vec{v} للمستوى (P).

02. خاصية:

أ- خاصية :

a و b و c و d من \mathbb{R} مع $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $ax+by+cz+d=0$ هي مستوى و المتجهة الغير المنعدم $\vec{n}(a,b,c)$ منظمة على هذا المستوى.

ب- أمثلة :

- ماذا تمثل مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق ما يلي : $x+2y-z+4=0$.
 - مجموعة النقط هي المستوى (P) حيث $\vec{n}(1,2,-1)$ منظمة على (P) و المارة من $A(0,0,4)$ (لأن إحداثيات A تحقق المعادلة)
 - نجد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من $A(2,1,-3)$ و متجهة منظمة عليه هي $\vec{n}(1,1,2)$.
- ليكن $M(x,y,z)$ من الفضاء .

لدينا : $M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \times 1 + (y-1) \times 1 + (z+3) \times 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x+y+2z+3=0$$

خلاصة : معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي : $x+y+2z+3=0$: (P) .

ج- ملحوظة :

المستوى السابق نرمل له ب: $P(A, \vec{n})$ أو $P(A(0,0,4), \vec{n}(1,2,-1))$

مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ هي المستوى (P) المار من A و متجهة منظمة على (P) هي \vec{n} (أي $P(A, \vec{n})$).

د- خاصية :

الفضاء (صح) منسوب إلى معلم متعامد منظم $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

كل مستوى (P) يقبل معادلة (تسمى ديكارتية) على شكل : $ax+by+cz+d=0$ مع $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.
المتجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منظمة على هذا المستوى .

درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

= برهان :

نبين أن : $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على هذا المستوى .

$$\text{لدينا : (1) } M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$$

$$\text{(2) } A(x_0,y_0,z_0) \in (P) \Leftrightarrow ax_0+by_0+cz_0+d=0$$

فرق ل (1) مع (2) نحصل على : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

$$\cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \quad \text{ومنه :}$$

خلاصة : $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على هذا المستوى .

VI . مسافة نقطة عن مستوى :

01. تعريف:

(P) مستوى من الفضاء و A نقطة من الفضاء و النقطة H المسقط العمودي ل A على المستوى (P) المسافة AH تسمى المسافة للنقطة A عن المستوى (P) ونرمز لها ب : $AH = d(A,(P))$.

02. خاصية:

A نقطة من الفضاء و (P) مستوى من الفضاء الذي معادلته هي : $ax+by+cz+d=0$ مسافة النقطة A عن المستوى (P)

$$\text{هي : } AH = d(A,(P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

03. برهان :

لنعتبر (P) مستوى من الفضاء معادلته $ax+by+cz+d=0$ و $A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة من الفضاء و $H(x_H,y_H,z_H)$ المسقط العمودي ل A على المستوى (P) .

نعلم أن :

$$\cdot (\vec{n} \perp (P)) . (\vec{n}(a,b,c) \text{ منظمية على } (P))$$

$$\cdot H \text{ المسقط العمودي ل A على المستوى } (P)$$

$$\cdot (H \in (P) \text{ لأن } ax_H + by_H + cz_H + d = 0 \text{ و } \overrightarrow{AH} \perp (P))$$

$$\cdot \text{من خلال } ax_H + by_H + cz_H + d = 0 \text{ فإن } ax_H + by_H + cz_H + d = -d$$

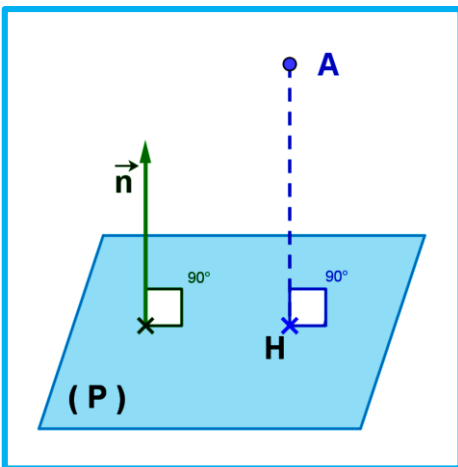
$$\cdot \text{ومنه : } \vec{n} \text{ و } \overrightarrow{AH} \text{ مستقيمتين و بالتالي : } \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AH} = t\vec{n}$$

من جهة أخرى :

الجداء السلمي ل \vec{n} و \overrightarrow{AH} هو :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \\ z_H - z_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$= a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) + c(z_H - z_A)$$



درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

$$= ax_A + by_A + cz_A - \left(\underbrace{ax_H + by_H + cz_H}_{-d} \right)$$

$$= ax_A + by_A + cz_A + d$$

$$(1) \quad |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = |ax_A + by_A + cz_A + d| \quad \text{إن:}$$

$$(2) \quad |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = AH \|\vec{n}\| \quad \text{أي} \quad |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = AH \|\vec{n}\| \cos(\overrightarrow{AH}, \vec{n}) = AH \|\vec{n}\| \quad \text{نعلم أن: } \vec{n} \text{ و } \overrightarrow{AH} \text{ مستقيمتين إن:}$$

$$\text{من خلال: (1) و (2) نستنتج أن: } AH \|\vec{n}\| = |ax_A + by_A + cz_A + d|$$

$$\text{ومنه: } AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\|\vec{n}\|}$$

04. مثال:

لنعتبر المستوى $P(O, \vec{i}, \vec{j})$ و النقطة $A(0, 0, m)$ و $m \in \mathbb{R}$

(1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) .

(2) أحسب مسافة النقطة A عن المستوى (P) .

(3) ماذا تمثل الحالة التي تكون فيها $d(A, (P)) = 0$.

VII. الأوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات و التعامد

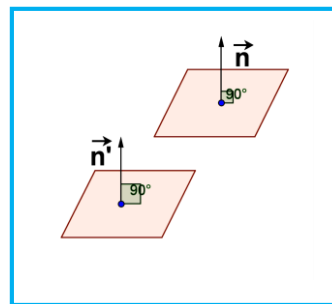
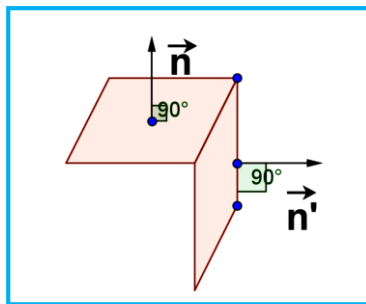
01. خاصية 1:

$\vec{n}'(a', b', c')$ و $\vec{n}(a, b, c)$ مستويين من الفضاء و $(P_2): a'x + b'y + c'z + d' = 0$ و $(P_1): ax + by + cz + d = 0$

منظمتين على (P_1) و (P_2) على التوالي

$(P_2) \parallel (P_1)$ يكافئ \vec{n}' و \vec{n} مستقيمتين

$(P_2) \perp (P_1)$ يكافئ $\vec{n}' \cdot \vec{n} = 0$ (الجداء السلمي = 0)

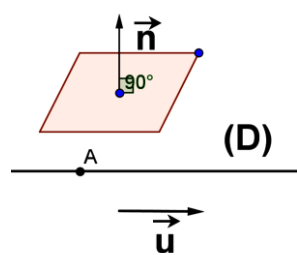
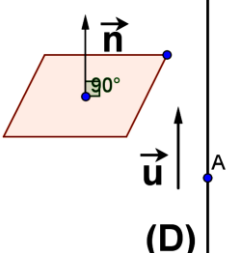


02. خاصية 2:

$P(A, \vec{n})$ مستوى من الفضاء و $D(A, \vec{u})$ مستقيم من الفضاء.

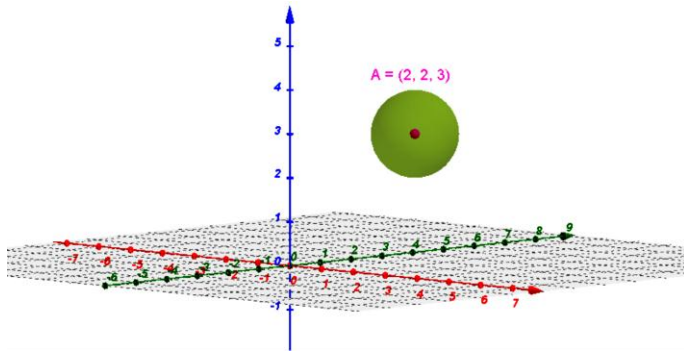
$(D) \parallel (P)$ يكافئ $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ (الجداء السلمي = 0)

$(D) \perp (P)$ يكافئ \vec{u} و \vec{n} مستقيمتين.



درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

دراسة تحليلية للفلكة:

.VIII
01. فلكة:

تعريف:

 Ω نقطة من الفضاء و R عدد حقيقي موجب قطعاً ($R > 0$)الفلكة (S) التي مركزها Ω و شعاعها R هي مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M = R$ ونرمز لها ب: $S(\Omega, R)$. A و B نقطتين من (S) حيث Ω منتصف القطعة $[AB]$ هذه القطعة تسمى قطر للفلكة (S) ونرمز للفلكة كذلك ب: $S_{[AB]}$.02. معادلة ديكارتية لفلكة $S(\Omega, R)$:

خاصية:

معادلة ديكارتية للفلكة $S(\Omega(a, b, c), R)$ هي :

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = R^2 \quad // \text{ أو أيضا}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad // \text{ مع } d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$$

مثال:

معادلة ديكارتية للفلكة: $S(0,1)$ هي: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 03. معادلة ديكارتية لفلكة $S_{[AB]}$:

خاصية:

 A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء.مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق: $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$ هي الفلكة $S_{[AB]}$ التي معادلتها الديكارتية هي:

$$(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$$

برهان:

نعتبر I منتصف $[AB]$ (أي مركز الفلكة (S))

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0 \Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IA})(\overline{MI} + \overline{IB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{MI}^2 + \overline{MI} \cdot \overline{IB} + \overline{IA} \cdot \overline{MI} + \overline{IA} \cdot \overline{IB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{MI}^2 + \overline{MI}(\overline{IA} + \overline{IB}) + \overline{IA} \cdot (-\overline{IA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{MI}^2 + \overline{MI} \cdot \vec{0} - \overline{IA}^2 = 0$$

لدينا:

$$\Leftrightarrow \overline{MI}^2 = \overline{IA}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MI} = \overline{IA}$$

$$\Leftrightarrow M \in S_{(I, r=\overline{IA})}$$

درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

خلاصة : مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ هي الفلكة التي مركزها I منتصف [AB] و شعاعها

$$r = IA = \frac{AB}{2} \text{ أو أيضا الفلكة } S_{[AB]} \text{ التي قطرها [AB].}$$

مثال:

حدد معادلة ديكارتية للفلكة $S_{[AB]}$ و $A(0,1,0)$ و $B(0,-1,0)$

$$M(x,y,z) \in S_{[AB]} \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1; (\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0)$$

04. دراسة مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$, (a و b و c و d من \mathbb{R})

خاصية:

a و b و c و d من \mathbb{R} حيث $R_2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

(E) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ هي :

$$\text{أ- الفلكة } (E) = S \left(\Omega \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right), R = \frac{\sqrt{R_2}}{2} \right)$$

إذا كان $R_2 > 0$.

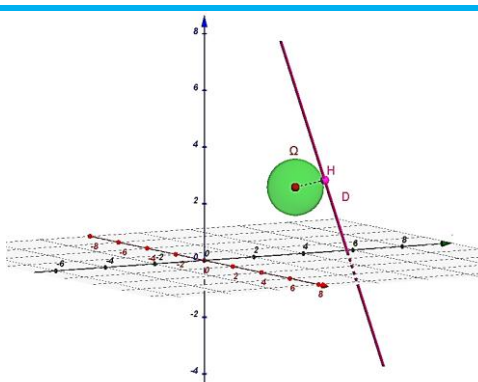
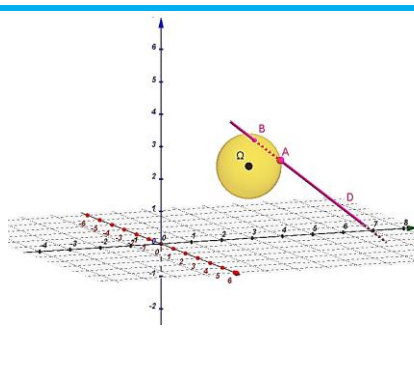
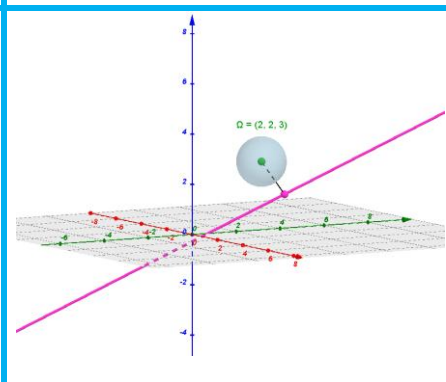
$$\text{ب- } (E) = \left\{ \Omega \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right) \right\} \text{ إذا كان } R_2 = 0$$

$$\text{ج- } (E) = \emptyset \text{ إذا كان } R_2 < 0.$$

IX. تقاطع فلكة $S(\Omega, R)$ و مستقيم $D(A, \vec{u})$

01. خاصيات:

H المسقط العمودي ل Ω على (D) و $d = \Omega H$

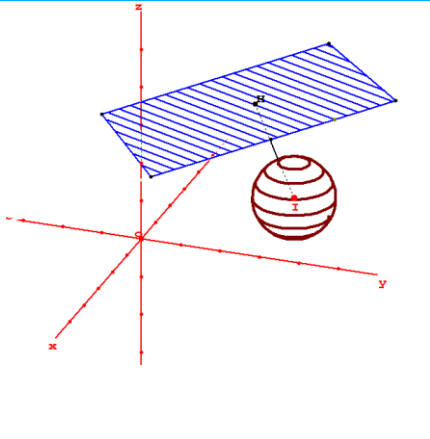
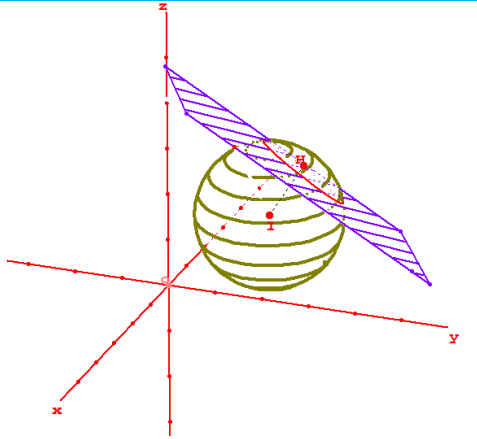
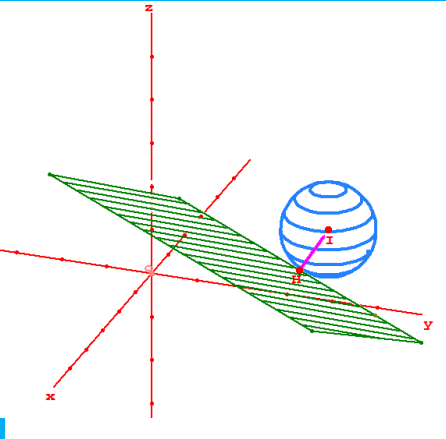
حالة 3 :	حالة 2 :	حالة 1 :
$(D) \cap (S) = \{H\}$	$(D) \cap (S) = \{A, B\}$	$(D) \cap (S) = \emptyset$
نقول : (D) مماس ل (S) في H	نقول : (D) يقطع (S) في A و B	نقول : (D) خارج الفلكة (S)
شرط : $d = \Omega H = R$	شرط : $d = \Omega H < R$	شرط : $d = \Omega H > R$
		

درس : الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

X. تقاطع فلكة $S(\Omega, R)$ و مستوى $P(A, \vec{u}, \vec{v})$

01. الأوضاع النسبية - خاصيات:

H المسقط العمودي ل Ω على المستوى (P) و $d = \Omega H$

حالة 1: $(P) \cap (S) = \emptyset$	حالة 2: $(P) \cap (S) = (C)$	حالة 3: $(D) \cap (S) = \{H\}$
نقول: (P) خارج الفلكة (S)	نقول: (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) مركزها H و شعاعها $R_C = \sqrt{R^2 - d^2}$	نقول: (P) مماس للفلكة في النقطة H حيث المستقيم $(H\Omega) \perp (P)$
شرط: $d = \Omega H > R$	شرط: $d = \Omega H < R$	شرط: $d = \Omega H = R$
		

02. خاصية:

$S(\Omega, R)$ فلكة و A من (S) يوجد مستوى وحيد (P) مماس ل (S) عند النقطة A وهو المستوى العمودي على المستقيم

$(A\Omega)$ في النقطة A أي: $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$ ومنه معادلة (P) هي $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$