أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مـادة الـريـاضـيـات	الأستاذ : عثماني نجيب مذكرة رقم 4/

مستوى : السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية
- **مسلك علوم الحياة و الأرض**
- **مسلك العلوم الفيزيائية**
- **مسلك العلوم الزراعية**

مذكرة رقم 4 في درس المتتاليات العددية

محتوى الدرس	القدرات المنتظرة	المكتسبات السابقة	الامتدادات
▪ نهاية متتالية ▪ نهاية المتتاليات المرجعية ▪ تقارب متتالية ▪ العمليات على النهايات ▪ النهايات والترتيب ▪ مصاديق التقارب ▪ متتاليات خاصة	▪ استعمال المتتاليات المرجعية و الهندسية و الحسابية في دراسة أمثلة لمتتاليات من الشكل : $u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}$ و $u_{n+1}=au_n+b$ ▪ استعمال المتتاليات المرجعية ومصاديق التقارب في النهايات ▪ تحديد نهاية متتالية من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث $f(I)\subset I$ و f دالة متصلة على مجال I ▪ استعمال نهاية متتالية في حل مسائل من مجالات مختلفة	▪ نهايات الدوال العددية ▪ المتتاليات الهندسية و المتتاليات الحسابية ▪ رتابة متتالية ▪ متتالية مكبورة ومصغورة ومحدودة	دراسة وضعيات متقطعة من مجالات مختلفة

I. نهاية المتتاليات المرجعية

تمرين تمهيدي : أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^6}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

ولكون المتتالية العددية هي نوع من الدوال العددية معرفة على $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$ فإننا نحصل على نتائج مشابهة :

خاصية1 : المتتاليات المرجعية : (n) و (n^2) و (n^3) و $(\sqrt{n})$ و (n^p) حيث $p\in\mathbb{N}$ و $p\geq 4$

تؤول الى $+\infty$ عندما تؤول n الى $+\infty$

ونكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$

خاصية2 : المتتاليات المرجعية : $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ و $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ و $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ و $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$ و $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ حيث $p\in\mathbb{N}$ و $p\geq 4$

تؤول الى 0 عندما تؤول n الى $+\infty$

ونكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$

تمرين1 : أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}+3$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-4}{n^3}-7$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{n}}+5$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8}{n^7}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^5$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{2}n^6$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^9$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n^9}+13$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-4}{n}+5n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n^3}+\dfrac{3}{n}+1$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{\sqrt{n}}-4n$

II. تقارب متتالية :

لتكن (u_n) متتالية عددية

- نقول إن المتتالية (u_n) متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية l
- نقول إن المتتالية (u_n) متباعدة إذا كانت غير متقاربة أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ أو (u_n) ليس لها نهاية

مثال : حدد من بين المتتاليات التالية المتتاليات المتقاربة:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n}+n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n^2}+\dfrac{5}{n}+2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}-7n$

خاصية: لتكن (u_n) متتالية عددية و l عددا حقيقيا

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$ يعني $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-l=0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$ يعني $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n-l|=0$

III. العمليات على النهايات

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين و l و l' أعدادا حقيقية

نقبل أن العمليات على المتتاليات العددية هي نفسها على الدوال العددية

الجمع و الضرب

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ش غ م

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞
$\lim v_n$	l'	$l \succ 0$	$l \prec 0$	$l \succ 0$	$l \prec 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim(u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ش غ م

1. المقلوب و الخارج:

$\lim u_n$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{u}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

$\lim u_n$	l		$l \prec 0$	$l \succ 0$	$-\infty$	$l \prec 0$	l	∞	0
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$l \prec 0$	$-\infty$	∞	∞	0
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0^+	0^-	0^-	$+\infty$	0^+	0	شد غ م	ش غ م

أمثلة : أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 - n \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}-\frac{2}{3n}+\frac{5}{n^2}-1$$

$$, \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}$$

أجوبة:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}-\frac{2}{3n}+\frac{5}{n^2}-1 = 0-0+0-1=-1$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3n}=0$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=(-3+0)(1+0)=(-3)(1)=-3$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$

$\lim_{n\to+\infty} n^2-n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غيرمحدد من قبيل : $+\infty-\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2-n = \lim_{n\to+\infty} n(n-1)=+\infty$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} n-1=+\infty$ و $+\infty\times+\infty=+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(4-\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{4}{3}$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{7}{n^2}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2}=0$

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n$ الحساب مباشرة نحصل على شكل غير محدد من قبيل: $+\infty-\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(1-2\sqrt{n}\right)=-\infty$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(1-2\sqrt{n}\right)=-\infty$ و $+\infty\times-\infty=-\infty$

ملاحظة :

- ❖ نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة
- ❖ نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

تمرين2 : أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1$$

$$\lim_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9 \;,\; \lim_{n\to+\infty}\frac{9n-3}{3n+5} \;,\; \lim_{n\to+\infty}\frac{6n^2-9}{3n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^5+3n-4} \;,\; \lim_{n\to+\infty}\frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9} \;,\; \lim_{n\to+\infty}(n+1)^2-(n-1)^2$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+2}-\sqrt{n} \;,\; \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1}-n$$

أجوبة: $\lim_{n\to+\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}}=\frac{5}{3}$ لأن: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{7}{n^2}=0$

$$\lim_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1=\lim_{n\to+\infty}4n^3=+\infty$$

لأن: نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$\lim_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9=\lim_{n\to+\infty}-2n^5=\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{9n-3}{3n+5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{9n}{3n}=\frac{9}{3}=3$$

لأن: نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{6n^2-9}{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{6n^2}{3n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3\times2\times n\times n}{3n}=\lim_{n\to+\infty}2\times n=+\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^5+3n-4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\times n}{n\times n\times n\times n\times n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}=\lim_{n\to+\infty}\frac{7n^2}{14n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{7n\times n}{14n\times n\times n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$$

الحساب مباشرة نحصل على شكل غير محدد من قبيل: $+\infty-\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)^2-(n-1)^2=\lim_{n\to+\infty}n^2+2n+1-\left(n^2-2n+1\right)=\lim_{n\to+\infty}4n=+\infty$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1}-n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\left(\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+1\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+1}=\frac{1}{2}$$

ملاحظة :

❖ نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة

❖ نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

IV. متتاليات خاصة

أ) نهاية المتتالية $\left(a^n\right)$

خاصية. ليكن a عددا حقيقيا

1. إذا كان : $a>1$ فان : $\left(a^n\right)$ تؤول إلى $+\infty$
2. إذا كان : $a=1$ فان : $\left(a^n\right)$ تؤول إلى 1
3. إذا كان : $-1<a<1$ فان : $\left(a^n\right)$ تؤول إلى 0
4. إذا كان : $a\le -1$ فان : المتتالية $\left(a^n\right)$ ليست لها نهاية

أمثلة : حسب النهايات التالية: $\lim_{n\to+\infty}2^n$ ، $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ،

$\lim_{n\to+\infty}(-5)^n$

أجوبة: $\lim_{n\to+\infty}2^n=+\infty$: لأن: $a=2>1$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ لأن: $-1<a=\frac{2}{3}<1$

$(-5)^n$ ليست لها نهاية : لأن: $a=-5<-1$

تمرين3: أحسب النهايات التالية: $\lim_{n\to+\infty}(0,7)^n$ ، $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}$ ، $\lim_{n\to+\infty}(-2)^n$ ، $\lim_{n\to+\infty}(4)^{-n}$ ، $\lim_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}$ ،

$\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}$

أجوبة: $\lim_{n\to+\infty}(0.7)^n=0$: لأن: $-1<a=0.7<1$

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2}^n=+\infty$ لأن: $a=\sqrt{2}>1$ و

$$\lim_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}=+\infty-0=+\infty$$

لأن: $(-2)^n$ ليست لها نهاية لأن: $a=-2<-1$

$\lim_{n\to+\infty}(4)^{-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(4)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ لأن: $-1<a=\frac{1}{4}<1$

و $\lim_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=+\infty$ لأن: $a=\frac{5}{4}>1$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n}{(2)^n}+\frac{(2)^n}{(2)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n+1=+\infty+1=+\infty$$

ب) نهاية المتتالية $(n)^{\alpha}_{n\ge n_0}$ حيث $\alpha\in\mathbb{Q}$

• إذا كان : $\alpha\succ 0$ فان : $\lim_{n\to+\infty}(n)^{\alpha}=+\infty$

• إذا كان : $\alpha\prec 0$ فان : $\lim_{n\to+\infty}(n)^{\alpha}=0$

مثال : أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty}(n)^{\frac{4}{3}}$ ، $\lim_{n\to+\infty}(n)^{-\frac{6}{7}}$ ،

$\lim_{n\to+\infty}(n)^{\frac{3}{5}}-(n)^{\frac{1}{3}}+4$

الجواب: $\lim_{n\to+\infty}(n)^{\frac{4}{3}}=+\infty$ ، $\lim_{n\to+\infty}(n)^{-\frac{6}{7}}=0$ ،

$$\lim_{n\to+\infty}(n)^{\frac{3}{5}}-(n)^{\frac{1}{3}}+4=\lim_{n\to+\infty}(n)^{\frac{1}{3}}\left((n)^{\frac{3}{5}-\frac{1}{3}}-1+4(n)^{-\frac{1}{3}}\right)=\lim_{n\to+\infty}(n)^{\frac{1}{3}}\left((n)^{\frac{4}{15}}-1+4(n)^{-\frac{1}{3}}\right)=+\infty$$

تمرين4: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{3+u_n}\\ u_0=0\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{1+u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
2. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
3. أحسب: $\lim_{n\to+\infty}v_n$ و $\lim_{n\to+\infty}u_n$

أجوبة: 1) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{u_n-1}{3+u_n}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{\frac{2u_n+2}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+3}{2u_n+2}-\frac{2}{2u_n+2}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-2}{2u_n+2}=\frac{u_n+1}{2u_n+2}=\frac{u_n+1}{2(u_n+1)}=\frac{1}{2}=r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0=1$

2) بما أن: (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{2}$

5) نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ يعني $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-1$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{2}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{2}}-1=\frac{1}{\frac{n+2}{2}}-1=\frac{2}{n+2}-1=\frac{2-n-2}{n+2}=\frac{-n}{n+2}$$

3) حساب: $\lim_{n\to+\infty}v_n$ و $\lim_{n\to+\infty}u_n$

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}1+\frac{n}{2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}=+\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{n}=-1$$

المتتالية (v_n) متباعدة و المتتالية (u_n) متقاربة

تمرين5: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1 \\ u_0=10 \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=u_n-3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن : $u_n\ge 3$ $\forall n\in\mathbb{N}$
3. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
4. أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
5. أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n
6. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الجواب: 1) نعوض n ب0

فنجد: $u_{0+1}=\frac{2}{3}\times u_0+1=\frac{2}{3}\times10+1=\frac{20}{3}+1=\frac{20}{3}+\frac{3}{3}=\frac{23}{3}$ اذن : $u_1=\frac{23}{3}$

نعوض n ب 1

فنجد : $u_{1+1}=\frac{2}{3}\times u_1 1=\frac{2}{3}\times\frac{23}{3}+1=\frac{46}{9}+1=\frac{46}{9}+\frac{9}{9}=\frac{55}{9}$ اذن : $u_2=\frac{55}{9}$

نعوض n ب 0 فنجد : $v_0=u_0-3=10-3=7$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=u_1-3=\frac{23}{3}-3=\frac{23}{3}-\frac{9}{3}=\frac{14}{3}$

2) نستعمل برهانا بالترجع

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=10\ge 3$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب) نفترض أن: $u_n\ge 3$

ج) نبين أن: $u_{n+1}\ge 3$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-3=\frac{2}{3}u_n+1-3=\frac{2}{3}u_n-2=\frac{2}{3}(u_n-3)$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge 3$

اذن : $u_n-3\ge 0$ منه $u_{n+1}-3\ge 0$ وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 3$

3) دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+1-u_n=-\frac{1}{3}u_n+1=-\frac{1}{3}(u_n-3)$$

نعلم أن: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 3$ حسب السؤال 2) اذن : $u_{n+1}-u_n\le 0$

ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

4)

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-3}{u_n-3}=\frac{\frac{2}{3}u_n+1-3}{u_n-3}=\frac{\frac{2}{3}u_n-2}{u_n-2}=\frac{\frac{2}{3}u_n-\frac{6}{2}}{u_n-2}=\frac{\frac{2}{3}(u_n-3)}{u_n-2}=\frac{2}{3}=q$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0=7$

كتابة v_n بدلالة n :

بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=7$

فان: $v_n=7\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n

لدينا: $v_n=u_n-3$ اذن: $v_n+3=u_n$ أي: $u_n=7\left(\frac{2}{3}\right)^n+3$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 7\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ لأن : $-1<\frac{2}{3}<1$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} 7\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+3=3$$

تمرين6: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{5u_n}{2u_n+3} \\ u_0=2 \end{cases}$

$\forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. بين أن : $u_n>1\ \forall n\in\mathbb{N}$
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
4. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

أجوبة : 1) نستعمل برهانا بالترجع

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=2>1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب) نفترض أن: $u_n\ge 1$

ج) نبين أن: $u_{n+1}\ge 1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{5u_n}{2u_n+3}-1=\frac{5u_n-(2u_n+3)}{2u_n+3}=\frac{3u_n-3}{2u_n+3}=\frac{3(u_n-1)}{2u_n+3}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n>1$

اذن : $u_n-1>0$ و $2u_n+3>0$ و منه $u_{n+1}-1\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 1$

2) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{5u_n}{2u_n+3}$

$$v_{n+1}=\frac{\frac{5u_n}{2u_n+3}-1}{\frac{5u_n}{2u_n+3}}=\frac{\frac{5u_n-2u_n-3}{2u_n+3}}{\frac{5u_n}{2u_n+3}}=\frac{\frac{3u_n-3}{2u_n+3}}{\frac{5u_n}{2u_n+3}}=\frac{3(u_n-1)}{5u_n}=\frac{3}{5}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها : $q=\frac{3}{5}$ وحدها الأول : $v_0=1$

3) بما أن : (v_n) متتالية هندسية أساسها : $q=\frac{3}{5}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=(1)\times\left(\frac{3}{5}\right)^n=\left(\frac{3}{5}\right)^n$

نعلم أن: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ يعني $v_n=1-\frac{1}{u_n}$ يعني $\frac{1}{u_n}=1-v_n$ يعني $u_n=\frac{1}{1-v_n}$

ونعلم أن : $v_n=\left(\frac{3}{5}\right)^n$ اذن : $u_n=\frac{1}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$ لأن : $-1<\frac{3}{5}<1$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}=1$$

VII. النهايات والترتيب و مصاديق التقارب:

خاصية1: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين متقاربتين و l و l' عددين حقيقيين بحيث $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

- إذا كان : $u_n \ge v_n$ فان : $l \ge l'$
- إذا كان : $u_n > 0$ فان : $l \ge 0$

تمرين7: تكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين بحيث :

$$u_n = 3-\frac{1}{n} \quad و \quad v_n = 3+\frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1. بين بالترجع أن $u_n < v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$
2. قارن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

خاصية2: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين و l و α عددين حقيقيين بحيث $\alpha \succ 0$

إذا كانت : $|v_n - l| \le \alpha u_n$ $\forall n \ge p$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

فان : المتتالية (v_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

خاصية3: لتكن (u_n) و (v_n) و (w_n) متتاليات عددية

إذا كانت : $w_n \prec u_n \prec v_n$ $\forall n \ge p$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$

فان : المتتالية (u_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

مثال : أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$

الجواب: نعلم أن : $\forall n \in \mathbb{N}\ -1 \le \sin n \le 1$ أو $|\sin n| \le 1$

اذن : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \frac{-1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$ و نعلم أن : $\lim \frac{-1}{n} = \lim \frac{1}{n} = 0$

اذن حسب الخاصية السابقة فان : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

تمرين8: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = 3+\frac{\sin n}{n^3}$

بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

الجواب: $u_n = 3+\frac{\sin n}{n^3}$ تعني : $u_n - 3 = \frac{\sin n}{n^3}$

تعني : $|u_n - 3| = \left|\frac{\sin n}{n^3}\right|$

اذن : $|u_n - 3| \le \frac{1}{n^3}$ و نعلم أن : $\lim \frac{1}{n^3} = 0$ اذن حسب الخاصية السابقة فان : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

تمرين9: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

1. أحسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
2. استنتج : $\lim\limits_{n\to\infty} 3n+2(-1)^n$

الجواب: 1) نعلم أن : $\forall n \in \mathbb{N}\ -1 \le (-1)^n \le 1$

اذن : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \frac{-1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}$ و نعلم أن : $\lim \frac{-1}{n} = \lim \frac{1}{n} = 0$

اذن حسب الخاصية السابقة فان : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} 3n+2(-1)^n = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(3+2\frac{(-1)^n}{n}\right)$ بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

اذن : $\lim\limits_{n\to\infty} 3+2\frac{(-1)^n}{n} = 3$ ومنه : $\lim\limits_{n\to\infty} 3n+2(-1)^n = +\infty$

خاصية4: لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين و α عدد حقيقي بحيث $\alpha \succ 0$

- إذا كانت : $v_n \ge \alpha u_n$ $\forall n \ge p$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ فان: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- إذا كانت : $v_n \le \alpha u_n$ $\forall n \ge p$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ فان : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

مثال1 : نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي :

$$v_n = 2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. بين أن : $v_n \ge \frac{4}{3}n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$
2. استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

الجواب: 1) نعلم أن : $\forall n \in \mathbb{N}\ (-1)^n \ge -1$

اذن : $2(-1)^n \ge -2$ اذن : $2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2 \ge -2 + \frac{4}{3}n^2 + 2$

اذن : $v_n \ge \frac{4}{3}n^2$

2) نعلم أن : $v_n \ge \frac{4}{3}n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ و $\lim \frac{4}{3}n^2 = +\infty$

اذن حسب الخاصية السابقة فان : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

تمرين10: نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي :

$$v_n = 3n + 5\sin n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. بين أن : $v_n \ge 3n-5$ $\forall n \in \mathbb{N}$
2. استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

الجواب: 1) نعلم أن : $\forall n \in \mathbb{N}\ \sin n \ge -1$

اذن : $5\sin n \ge -5$ اذن : $v_n \ge 3n-5$

2) نعلم أن : $v_n \ge 3n-5$ $\forall n \in \mathbb{N}$ و $\lim 3n-5 + \infty$

اذن حسب الخاصية السابقة فان : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

مثال2 : نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي:

$$v_n = -4n + 3\cos n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. بين أن : $v_n \le -4n+3$ $\forall n \in \mathbb{N}$
2. استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

الجواب: 1) نعلم أن : $\forall n \in \mathbb{N}\ \cos n \le 1$

اذن : $3\cos n \le 3$ اذن : $v_n \le -4n+3$

2) نعلم أن : $v_n \le -4n+3$ $\forall n \in \mathbb{N}$ و $\lim -4n+3 = -\infty$

اذن حسب الخاصية السابقة فان : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

خاصية5:

1. كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متقاربة
2. كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متقاربة

ملاحظة :

1. كل متتالية تزايدية و سالبة هي متقاربة
2. كل متتالية تناقصية و موجبة هي متقاربة

مثال1: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases} u_{n+1}=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}\\ u_0=3\end{cases}$

1. بين أن المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 4
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
3. ماذا تستنتج ؟

الأجوبة :1)

1)يكفي ان نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le 4$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=3\le 4$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

◎نفترض أن: $u_n\le 4$

◎نبين أن: $u_{n+1}\le 4$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $4-u_{n+1}=4-\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{4(u_n+2)-8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{-4u_n+16}{u_n+2}$

$4-u_{n+1}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le 4$

اذن : $4-u_n\ge 0$ و $u_n+2>0$ و منه $4-u_{n+1}\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le 4$

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-u_n=\frac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2}$

نعمل $-u_n^2+6u_n-8$ نحسب المميز Δ

$\Delta=36-32=4>0$ هناك جذرين : $x_1=\frac{-6+2}{-2}=2$ و $x_2=\frac{-6-2}{-2}=4$

ومنه التعميل : $-u_n^2+6u_n-8=-(u_n-2)(u_n-4)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$

لدينا : $u_n\ge 2$ اذن : $u_n\ge 0$ و $u_n-2\ge 0$

و لدينا : $u_n\le 4$ اذن : $u_n-4\le 0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}\ge 0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

3) المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة اذن هي متتالية متقاربة

تمرين11:نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases} u_{n+1}=\frac{4u_n-2}{u_n+1}\\ u_0=1\end{cases}$

1. بين أن المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 2
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
3. ماذا تستنتج ؟

الأجوبة :1)يكفي ان نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le 2$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\le 2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

◎نفترض أن: $u_n\le 2$

◎نبين أن: $u_{n+1}\le 2$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $2-u_{n+1}=2-\frac{4u_n-2}{u_n+1}=\frac{2(u_n+1)-(4u_n-2)}{u_n+1}=\frac{-2u_n+4}{u_n+1}$

$2-u_{n+1}=\frac{2(2-u_n)}{u_n+1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le 2$

اذن : $2-u_n\ge 0$ و $u_n+1>0$ و منه $2-u_{n+1}\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\le 2$

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n-2}{u_n+1}-u_n=\frac{4u_n-2-u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{u_n+2}$

نعمل $-u_n^2+3u_n-2$ نحسب المميز Δ

$\Delta=9-8=1>0$ هناك جذرين : $x_1=\frac{-3+1}{-2}=1$ و $x_2=\frac{-3-1}{-2}=2$

ومنه التعميل : $-u_n^2+3u_n-2=-(u_n-1)(u_n-2)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n-2)}{u_n+1}$

لدينا : $u_n\ge 1$ اذن : $u_n\ge 0$ و $u_n-1\ge 0$

و لدينا : $u_n\le 2$ اذن : $u_n-2\le 0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n-2)}{u_n+1}\ge 0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

3) المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة اذن هي متتالية متقاربة

تمرين12: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{u_n+1}\\ u_0=3\end{cases}$

$\forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n-2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 2$
3. أدرس رتابة المتتالية (u_n) ماذا تستنتج؟
4. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
5. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
6. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

أجوبة : 1) $u_1=\frac{5u_0-4}{u_0+1}=\frac{15-4}{3+1}=\frac{11}{4}$ و $v_0=\frac{1}{u_0-2}=\frac{1}{3-2}=1$

2)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=3\ge 2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge 2$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\ge 2$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-2=\frac{5u_n-4}{u_n+1}-2=\frac{5u_n-4-2(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{3u_n-6}{u_n+1}$

$u_{n+1}-2=\frac{3(u_n-2)}{u_n+1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge 2$

اذن : $u_n-2\ge 0$ و $u_n+1>0$ و منه $u_{n+1}-2\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 2$

3)دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n-4}{u_n+1}-u_n=\frac{5u_n-4-u_n\left(u_n+1\right)}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+4u_n-4}{u_n+1}$$

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{u_n^2-4u_n+4}{u_n+1}=-\frac{(u_n-2)^2}{u_n+1}\le 0$$ لأن : $-(u_n-2)^2\le 0$ و $u_n+1>0$

ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

الاستنتاج : المتتالية (u_n) تناقصية و مصغورة بالعدد 2 اذن هي متتالية متقاربة

4) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{5u_n-4}{u_n+1}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{5u_n-4}{u_n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{1}{\frac{5u_n-4-2(u_n+1)}{u_n+1}}-\frac{1}{u_n-2}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+1}{3u_n-6}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{u_n+1}{3(u_n-2)}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{u_n+1}{3(u_n-2)}-\frac{3}{3(u_n-2)}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+1-3}{3(u_n-2)}=\frac{u_n-2}{3(u_n-2)}=\frac{1}{3}=r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{3}$ وحدها الأول : $v_0=1$

5) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{3}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{3}$

نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n-2}$ يعني $u_n-2=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}+2$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{3}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{3}}+2=\frac{1}{\frac{n+3}{3}}+2=\frac{3}{n+3}+2=\frac{3+2n+6}{n+3}=\frac{9+2n}{n+3}$$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{n}{3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{3}=+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{9+2n}{n+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{n}=2$

VI. تقارب المتتالية (v_n) بحيث $v_n=f(u_n)$

خاصية. لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين

إذا كانت : (u_n) متتالية متقاربة نهايتها l و f دالة متصلةعلى l

فان : المتتالية (v_n) بحيث $v_n=f(u_n)$ متقاربة و نهايتها $f(l)$

مثال 1: نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي :

$v_n=\cos\left(\frac{(0,1)^n+\pi}{(0,1)^n+4}\right)$ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

خاصية. (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين

لتكن f دالة متصلة علي مجال I من $\mathbb{R}$ بحيث $f(I)\subset I$

المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول من I و العلاقة

$u_{n+1}=f(u_n)$

إذا كانت : (u_n) متتالية متقاربة فان : نهايتها l

حل للمعادلة : $f(x)=x$

مثال: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ و $u_1=1$

1. بين أن $u_n\le 2$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n) واستنتج أن (u_n) متقاربة
3. نعتبر الدالة f المعرفة ب:

$f(x)=\frac{1}{2}x+1$ على المجال $I=]-\infty;2]$

أ)بين أن $f(I)\subset I$ و أن f دالة متصلة علي مجال I

ب) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الأجوبة: 1)نستعمل بر هانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $u_1=1\le 2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

ب)نفترض أن: $u_n\le 2$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\le 2$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $2-u_{n+1}=2-\frac{1}{2}u_n-1=1-\frac{1}{2}u_n=\frac{2-u_n}{2}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le 2$

اذن : $2-u_n\ge 0$ منه $2-u_{n+1}\ge 0$ وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n\le 2$

2)دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n+1-u_n=-\frac{1}{2}u_n+1=\frac{2-u_n}{2}$$

نعلم أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n\le 2$ حسب السؤال 1)اذن : $u_{n+1}-u_n\ge 0$

ومنه المتتالية (u_n) تزايدية

3)الدالة f المعرفة ب : $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ على المجال $I=]-\infty;2]$

f دالة حدودية اذن *متصلة على* $\mathbb{R}$ومنه *متصلة* على المجال $I=]-\infty;2]$

$f'(x)=\frac{1}{2}>0$ ومنه f تزايدية قطعا على المجال $I=]-\infty;2]$

$$f(I)=f(]-\infty;2])=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x);f(2)\right]=]-\infty;2]$$

ومنه حسب الخاصية السابقة فان: نهايتها l حل للمعادلة : $f(x)=x$

أي : $f(l)=l$ يعني $\frac{1}{2}l+1=l$ يعني $l+2=2l$ يعني $l=2$

تمرين13: نعتبر المتتالية العددية (u_n)

المعرفة كالتالي : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}\\ u_0=2\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. بين بالترجع أن : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$
4. أكتب v_n بدلالة n
5. استنتج طريقة أخرى لكتابة u_n بدلالة n

أجوبة : $u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}$

1) نعوض nب0

2) فنجد: $u_{0+1}=\frac{3}{2}\times u_0-1=\frac{3}{2}\times(-1)-1=-\frac{3}{2}-1=-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=-\frac{5}{2}$

اذن : $u_1=-\frac{5}{2}$

نعوض n ب 0 فنجد :

$u_{0+1}=\frac{-1}{2+u_0}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$ اذن : $u_1=-\frac{1}{4}$

نعوض n ب 1 فنجد :

$u_{1+1}=\frac{-1}{2+u_1}=\frac{-1}{2-\frac{1}{4}}=\frac{-1}{\frac{7}{4}}=\frac{-4}{7}$ اذن : $u_1=-\frac{4}{7}$

نعوض n ب 0 في $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ فنجد : $v_0=\frac{1}{u_0+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

نعوض n ب 1 فنجد : $v_1=\frac{1}{u_1+1}=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{4}$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{-1}{2+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{-1}{2+u_n}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{\frac{u_n+1}{2+u_n}}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+2}{u_n+1}-\frac{1}{u_n+1}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+2-1}{u_n+1}=\frac{u_n+1}{u_n+1}=1$$

ومنه (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_0=\frac{1}{3}$

3)أ) لدينا : $u_0=2$ و $\frac{-3\times0+2}{2\times0+1}=\frac{2}{1}=2$

اذن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$

ج) نبين أن : $u_{n+1}=\frac{-3(n+1)+2}{3(n+1)+1}$ أي نبين أن : $u_{n+1}=-\frac{3n+1}{3n+4}$ ؟؟؟

لدينا : $u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}$ وحسب افتراض الترجع لدينا : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}$

اذن : $u_{n+1}=\frac{-1}{2+u_n}=\frac{-1}{2+\frac{-3n+2}{3n+1}}=\frac{-1}{\frac{3n+4}{3n+1}}=-\frac{3n+1}{3n+4}$

ومنه : $u_n=\frac{-3n+2}{3n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$

4)بما أن : (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_0=\frac{1}{3}$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=\frac{1}{3}+n$

5)نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ يعني $u_n+1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-1$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{3}+n$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{\frac{1}{3}+n}-1=\frac{1}{\frac{3n+1}{3}}-1=\frac{3}{3n+1}-1=\frac{3-3n-1}{3n+1}=\frac{-3n-2}{3n+1}$$

تمرين14: نعتبر المتتالية العددية (u_n)

المعرفة كالتالي : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{5u_n-1}{u_n+3}\\ u_0=2\end{cases}\ \forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n-1}\ \forall n\in\mathbb{N}$

1)أحسب u_1 و v_0

2)بين أن : $u_n\ge1\ \forall n\in\mathbb{N}$

3)أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)

4)أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

5) أحسب $\lim v_n$ و $\lim u_n$

6)أدرس رتابة المتتالية (u_n)

الجواب 1) $u_1=\frac{5u_0-1}{u_0+3}=\frac{10-1}{2+3}=\frac{9}{5}$ و $v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{2-1}=1$

2)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=2\ge1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge1$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\ge1$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1=\frac{5u_n-1-(u_n+3)}{u_n+3}=\frac{4u_n-4}{u_n+3}=\frac{4(u_n-1)}{u_n+3}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge1$

اذن : $u_n-1\ge0$ و $u_n+3>0$ و منه $u_{n+1}-1\ge0$

وبالتالي: $u_n\ge1\ \forall n\in\mathbb{N}$

3) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{4u_n}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{4}{4u_n-4}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-4}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4(u_n-1)}=\frac{1}{4}=r$$

ومنه (v_n)متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

3) بما أن :(v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

4) فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{4}$

نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ يعني $u_n-1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}+1$

ونعلم أن: $v_n=1+\frac{n}{4}$ اذن :

$$u_n=\frac{1}{1+\frac{n}{4}}+1=\frac{1}{\frac{n+4}{4}}+1=\frac{4}{n+4}+1=\frac{4+n+4}{n+4}=\frac{n+8}{n+4}$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{n}{4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n}{4}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n+8}{n+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n}{n}=1$

6)دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n-1}{u_n+3}-u_n=\frac{5u_n-1-u_n(u_n+3)}{u_n+3}=\frac{-u_n^2+2u_n-1}{u_n+3}$$

لأن : $u_{n+1}-u_n=-\frac{u_n^{\,2}-2u_n+1}{u_n+3}=-\frac{(u_n-1)^2}{u_n+3}\le 0$ و $-(u_n-1)^2\le 0$ و $u_n+3>0$

حسب السؤال 2) ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

<u>تمرين15</u>: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{6}{1+u_n} \\ u_0=3 \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{u_n-2}{u_n+3}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n
4. أحسب بدلالة n المجموع: $S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

<u>الجواب:</u> 1) نعوض n ب0 فنجد: $u_1=\frac{6}{1+u_0}=\frac{6}{1+3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ اذن : $u_1=\frac{3}{2}$

$v_0=\frac{u_0-2}{u_0+3}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$ و $v_1=\frac{u_1-2}{u_1+3}=\frac{\frac{1}{6}-2}{\frac{1}{6}+3}=\frac{\frac{-11}{6}}{\frac{19}{6}}=-\frac{11}{19}$

(2

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+3}=\frac{\frac{6}{1+u_n}-2}{\frac{6}{1+u_n}+3}=\frac{\frac{6-2(1+u_n)}{1+u_n}}{\frac{6+3(1+u_n)}{1+u_n}}=\frac{\frac{6-2-2u_n}{1+u_n}}{\frac{6+3+3u_n}{1+u_n}}=\frac{\frac{4-2u_n}{1+u_n}}{\frac{9+3u_n}{1+u_n}}=\frac{\frac{-2(u_n-2)}{1+u_n}}{\frac{3(3+u_n)}{1+u_n}}$$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+3}=\frac{-2(u_n-2)}{3(3+u_n)}=\frac{-2}{3}\times\frac{u_n-2}{u_n+3}=\left(-\frac{2}{3}\right)\times v_n$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=-\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{6}$

3) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=-\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{6}$

فان: $v_n=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

<u>استنتاج</u> u_n بدلالة n:

لدينا: $v_nu_n+3v_n-u_n=-2\Leftrightarrow v_n(u_n+3)=u_n-2\Leftrightarrow v_n=\frac{u_n-2}{u_n+3}$

$$u_n=\frac{2+3v_n}{1-v_n}\Leftrightarrow u_n=\frac{-2-3v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-2-3v_n\Leftrightarrow$$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ اذن : $u_n=\frac{2+3\times\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$

$$u_n=\frac{2+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

<u>تمرين16</u>: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n} \\ u_1=1 \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1. أحسب u_2 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية حسابية و حدد أساسها و حدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

<u>أجوبة :</u> 1) $u_2=\frac{u_1}{1+u_1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ و $v_1=\frac{1}{u_1}=\frac{1}{1}=1$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+u_n}{u_n}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+u_n-1}{u_n}=1=r$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_1=1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=1$ وحدها الأول : $v_1=1$

فان : $v_n=v_1+(n-1)r$ أي : $v_n=1+(n-1)$ يعني $v_n=n$

ونعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}$ ونعلم أن : $v_n=n$ اذن : $u_n=\frac{1}{n}$

<u>تمرين17</u>: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{u_n}{1+2u_n} \\ u_1=1 \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن (v_n) متتالية حسابية و حدد أساسها و حدها الأول
3. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

<u>أجوبة :</u> 1) $u_1=\frac{u_0}{1+2u_0}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$ و $v_0=\frac{1}{u_0}=\frac{1}{1}=1$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+2u_n}{u_n}-\frac{1}{u_n}=\frac{1+2u_n-1}{u_n}=2=r$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=2$ وحدها الأول : $v_0=1$

3) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=2$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+2n$

ونعلم أن: $v_n=\frac{1}{u_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}$ ونعلم أن : $v_n=1+2n$ اذن : $u_n=\frac{1}{1+2n}$

<u>تمرين18</u>: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1}=-1-\frac{1}{4u_n} \\ u_0=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{2}{2u_n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. بين أن : (v_n) متتالية حسابية
3. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

<u>أجوبة :</u> 1) $u_1=-\frac{3}{2}$ و $u_2=-\frac{5}{6}$ و $u_{13}=-\frac{7}{10}$

2) $v_{n+1}-v_n=-2$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=-2$ وحدها الأول : $v_0=1$

2) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=-2n+1$

5) نعلم أن : $v_n=\frac{2}{2u_n+1}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}-\frac{1}{2}$ يعني $u_n=\frac{1}{-2n+1}-\frac{1}{2}$

تمرين19: نعتبر المتتالية العددية (u_n)

المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\frac{5u_n+3}{u_n+3}\\u_0=1\end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ 0\le u_n\le 3$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n)
3. أبين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

أجوبة : 1) نستعمل برهانا بالترجع

نبين أولا أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ 0\le u_n$

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\ge 0$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب) نفترض أن: $u_n\ge 0$

ج) نبين أن: $u_{n+1}\ge 0$ ؟؟؟؟

حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge 0$ اذن : $u_{n+1}\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge 0$

نبين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\le 3$

أ) نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=1\le 3$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب) نفترض أن: $u_n\le 3$

ج) نبين أن: $u_{n+1}\le 3$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق

$$3-u_{n+1}=3-\frac{5u_n+3}{u_n+3}=\frac{3(u_n+3)-(5u_n+3)}{u_n+3}=\frac{-2u_n+6}{u_n+3}=\frac{-2(u_n-3)}{u_n+3}$$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\le 3$

اذن : $u_n-3\le 0$ و $u_n+3>0$ لأن $u_n\ge 0$ و منه $3-u_{n+1}\ge 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\le 3$

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n) نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n+3}{u_n+3}-u_n=\frac{5u_n+3-u_n(u_n+3)}{u_n+3}=\frac{-u_n^2+2u_n+3}{u_n+3}$$

نعمل $-u_n^2+2u_n+3$ نحسب المميز Δ

$\Delta=4+12=16>0$ هناك جذرين : $x_1=\frac{-2+4}{-2}=-1$ و $x_2=\frac{-2-4}{-2}=3$

ومنه التعميل : $-u_n^2+2u_n+3=-(u_n-3)(u_n+1)$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+3}$

لدينا : $u_n\ge 0$ اذن : $u_n+3\ge 0$ و $u_n+1\ge 0$

و لدينا : $u_n\le 3$ اذن : $u_n-3\le 0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-3)(u_n+1)}{u_n+3}\ge 0$ وبالتالي (u_n) تزايدية

3) $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{5u_n+3}{u_n+3}-3}{\frac{5u_n+3}{u_n+3}+1}=\frac{\frac{5u_n+3-3(u_n+3)}{u_n+3}}{\frac{5u_n+3+(u_n+3)}{u_n+3}}=\frac{\frac{2u_n-6}{u_n+3}}{\frac{6u_n+6}{u_n+3}}=\frac{2u_n-6}{6u_n+6}$$

$$v_{n+1}=\frac{2(u_n-3)}{6(u_n+1)}=\frac{1}{3}\frac{u_n-3}{u_n+1}=\frac{1}{3}v_n$$

اذن: المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$

وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-3}{u_0+1}=\frac{1-3}{1+1}=-1$

4) بما أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=-1$

فان: $v_n=(-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا: $v_nu_n+v_n-u_n=-3\Leftrightarrow v_n(u_n+1)=u_n-3\Leftrightarrow v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}$

$u_n=\frac{3+v_n}{1-v_n}\Leftrightarrow u_n=\frac{-3-v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-3-v_n\Leftrightarrow$

ونعلم أن : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ اذن $u_n=\frac{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

تمارين للبحث

تمرين1: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=\frac{1}{n(3-\sin n)}$

بين أن : $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$

تمرين2: نعتبر المتتالية العددية (u_n)

المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\ \begin{cases}u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\\u_0=1\end{cases}$

1. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\le u_n\le 1$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n) 3) ماذا تستنتج؟

تمرين3: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة

كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

1. بين أن المتتالية (u_n) تناقصية ومصغورة
2. ماذا نستنتج؟

تمرين4: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$u_0=2$ و $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$

1. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\le u_n\le 3$
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n) واستنتج أن (u_n) متقاربة
3. نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x)=\sqrt{x+6}$

على المجال $I=[0,3]$

a) بين أن $f(I)\subset I$ و أن f دالة متصلة علي مجال I

b) أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

تمرين5:نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)$ المعرفة كالتالي :

$u_0 = 4$ و $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

1. بين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1$
2. أدرس رتابة المتتالية $\left(u_n\right)$ واستنتج أن $\left(u_n\right)$ متقاربة .
3. أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

تمرين6:نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)$ المعرفة كالتالي :

$u_0 = \frac{5}{4}$ و $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}$

4. بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 2$
5. أدرس رتابة المتتالية $\left(u_n\right)$ واستنتج أن $\left(u_n\right)$ متقاربة
6. نعتبر الدالة f المعرفة ب :

$f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ على المجال $I = \left]-\infty; 2\right]$

ت) بين أن $f\left(I\right) \subset I$ و أن f دالة متصلة علي مجال I

ث) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

تمرين7:نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f\left(x\right) = \dfrac{6x}{x^3 + 4}$.

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f .
2. بين أن f تقابل من $\left[0; \sqrt[3]{2}\right]$ نحو مجال يجب تحديده.
3. نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right) \end{cases}$.

أ. بين أن: $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right); 1 \leq u_n \leq \sqrt[3]{2}$.

ب. بين أن $\left(u_n\right)$ تزايدية و استنتج أنها مقاربة و أحسب $\lim u_n$.