

المتتاليات العددية

2 ع ت

1. تعريف متتالية :

ليكن n_0 عددا طبيعيا .

عندما نربط كل عدد صحيح طبيعي $n_0 \leq n$ بعدد حقيقي وحيد u_n نقول إننا عرفنا متتالية عددية نرمز لها بالرمز $(u_n)_{n \geq n_0}$ أو (u_n) .
العدد u_{n_0} يسمى الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$.
العدد u_n يسمى الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$.

تعريف: متتالية مكبورة - مصغورة - محدودة

$(u_n)_{n \geq n_0}$ مكبورة بالعدد M يكافئ $u_n \leq M$ لكل $n_0 \leq n$.
 $(u_n)_{n \geq n_0}$ مصغورة بالعدد m يكافئ $u_n \geq m$ لكل $n_0 \leq n$.
 $(u_n)_{n \geq n_0}$ محدودة يكافئ أنها مكبورة ومصغورة .
يكافئ وجود عدد حقيقي موجب α حيث $|u_n| \leq \alpha$ لكل $n_0 \leq n$

رتابة متتالية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ تزايدية يكافئ $u_{n+1} - u_n \geq 0$ لكل $n_0 \leq n$.
 $(u_n)_{n \geq n_0}$ تناقصية يكافئ $u_{n+1} - u_n \leq 0$ لكل $n_0 \leq n$.
 $(u_n)_{n \geq n_0}$ ثابتة يكافئ $u_{n+1} = u_n$ لكل $n_0 \leq n$.
كل متتالية تزايدية تكون مصغورة بعدها الأول .
كل متتالية تناقصية تكون مكبورة بعدها الأول .

المتتالية الحسابية

نقول إن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r ، غير مرتبط بالعدد n ، حيث $u_{n+1} - u_n = r$ لكل $n_0 \leq n$.
صيغة الحد العام : $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$ لكل $n_0 \leq n$.
العلاقة بين حدين : $u_n = u_p + (n - p)r$ لكل $n_0 \leq p$ و $n_0 \leq n$.
صيغة المجموع : $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n - p + 1)(u_p + u_n)}{2}$.
لكل عددين طبيعيين n و p من $[n_0; +\infty[$ حيث $p \leq n$.

المتتالية الهندسية :

نقول إن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q ، غير مرتبط بالعدد n ، حيث $u_{n+1} = q u_n$ لكل $n_0 \leq n$.
صيغة الحد العام : $u_n = u_{n_0} \cdot q^{(n - n_0)}$ لكل $n_0 \leq n$.
العلاقة بين حدين : $u_n = u_p \cdot q^{(n - p)}$ لكل $n_0 \leq p$ و $n_0 \leq n$.
صيغة المجموع : $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n - p + 1}}{1 - q}$.
مع $q \neq 1$ لكل عددين طبيعيين n و p من $[n_0; +\infty[$ حيث $p \leq n$.

نهاية متتالية :

نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هي عدد حقيقي l إذا كان كل مجال مركزه l يحتوي على جميع حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة .
نقول إن نهاية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هي $(+\infty)$ إذا كان كل مجال من النوع $[a; +\infty[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة

تقارب متتالية :

نقول إن متتالية متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية .
كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة .

مصاديق تقارب متتالية :

كل متتالية تزايدية ومكبورة تكون متقاربة .
كل متتالية تناقصية و مصغورة تكون متقاربة .
إذا كان : $v_n < u_n < w_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0
 $\lim v_n = \lim w_n = l \in \mathbb{R}$ و
فإن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تكون متقاربة و $\lim u_n = l$
إذا كان : $|u_n - l| < v_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0 و $\lim v_n = 0$
فإن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و $\lim u_n = l$.
إذا كان : $u_n < v_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0 و $\lim v_n = -\infty$
فإن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متباعدة و $\lim u_n = -\infty$
إذا كان : $v_n < u_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0 و $\lim v_n = +\infty$
فإن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متباعدة و $\lim u_n = +\infty$

تقارب المتتالية ذات الحد العام a^n حيث $a \in \mathbb{R}$:



إذا كان $-1 < a < 1$ فإن $\lim a^n = 0$.
إذا كان $a = 1$ فإن $\lim a^n = 1$.
إذا كان $a > 1$ فإن $\lim a^n = +\infty$.
إذا كان $a \leq -1$ فإن : المتتالية (a^n) ليست لها نهاية .

تقارب المتتالية ذات الحد العام n^r حيث $r \in \mathbb{Q}^*$:

إذا كان $r > 0$ فإن $\lim_n n^r = +\infty$.
إذا كان $r < 0$ فإن $\lim_n n^r = 0$.

نهاية متتالية ترجعية :

لتكن f دالة متصلة على مجال I بحيث : $f(I) \subset I$ و u_0 عنصرا من I .
نعتبر المتتالية المعرفة بحددها الأول u_0 وبالعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n
إذا كانت (u_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق أن $f(l) = l$.

نهاية المتتالية : $v_n = f(u_n)$

إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة نحو عدد l و f دالة متصلة في l
فإن المتتالية (v_n) تكون متقاربة نحو $f(l)$