

المتتاليات العددية

(c) تكون الأعداد u و v في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة
المتتالية حسابية إذا كان $a+c=2b$ يعني $\frac{a+b}{2}=b$.

(2) الحد العام.

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = U_0 + nr \quad \text{لدينا}$$

ملاحظة:

(1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو:

$$. U_n = U_1 + (n-1)r$$

(2) إذا كان الحد الأول هو u_2 فإن الحد العام هو:

$$. U_n = U_2 + (n-2)r$$

(3) بصفة عامة: إذا كان U_p و U_n حدين من متتالية حسابية

$$U_n = U_p + (n-p)r \quad \text{أساسها } r \text{ فإن}$$

(ترتيب p و n غير مهم).

(3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

u_0 الحد الأول للمجموع S

u_n الحد الأخير للمجموع S

$n+1$ عدد حدود المجموع S .

ملاحظة:

$$(1) \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \frac{u_1 + u_n}{2}$$

$$(2) \quad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

(3) بصفة عامة

$$. u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n-p+1) \frac{u_p + u_n}{2}$$

III المتتاليات الهندسية.

(1) تعريف:

نقول إن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية إذا وجد عدد حقيقي q

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} = q U_n \quad \text{بحيث:}$$

العدد q يسمى أساس المتتالية

ملاحظات:

(a) تكون متتالية (حدودها غير منعدمة) هندسية إذا فقط إذا كان خارج حدين متتابعين ثابت وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

(b) لكي نبين أن المتتالية (U_n) هندسية يستحسن حساب U_{n+1}

$$. u_{n+1} = q \cdot u_n \text{ ونجد } U_n$$

(c) تكون الأعداد u و v و c في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة

لمتتالية هندسية إذا فقط إذا كان $ac = b^2$.

I) عموميات.

(1) تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق U من جزء I من \mathbb{N} نحو \mathbb{R} :

$$U: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow u(n)$$

(2) المتتاليات المحدودة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in I}$:

(a) مكبورة إذا فقط إذا وجد عدد M بحيث $(\forall n \in I) U_n \leq M$.

(b) مصغورة إذا فقط إذا وجد عدد m بحيث $(\forall n \in I) U_n \geq m$.

(c) محدودة إذا فقط إذا كانت مكبورة ومصغورة يعني.

إذا وجد عددين m و M بحيث $(\forall n \in I) : m \leq u_n \leq M$.

ملاحظة:

تكون $(U_n)_{n \in I}$ محدودة إذا وجد $k \geq 0$ بحيث $(\forall n \in I) : |U_n| \leq k$

(3) المتتالية الرتيبة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

(a) تزايدية إذا فقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \leq U_{n+1}$.

(b) تزايدية قطعاً إذا فقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n < U_{n+1}$.

(c) تناقصية إذا فقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \geq U_{n+1}$.

(d) تناقصية قطعاً إذا فقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n > U_{n+1}$.

(e) ثابتة إذا فقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n = U_{n+1}$.

ملاحظات:

(1) إذا كانت (U_n) تزايدية فإن $u_p \leq u_n$ $p < n$.

(2) إذا كانت (U_n) تناقصية فإن $u_p \geq u_n$ $p < n$.

(3) من أجل دراسة رتابة المتتالية (U_n) نقوم بدراسة إشارة

$$. u_{n+1} - u_n$$

(* إذا كانت $u_{n+1} - u_n \geq 0$ فإن (U_n) تزايدية.

(* إذا كانت $0 < u_{n+1} - u_n$ فإن (U_n) تزايدية قطعاً.

(* إذا كانت $u_{n+1} - u_n \leq 0$ فإن (U_n) تناقصية.

(* إذا كانت $0 < u_{n+1} - u_n$ فإن (U_n) تناقصية قطعاً.

(* إذا كانت $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن (U_n) ثابتة.

II المتتالية الحسابية

(1) تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حسابية إذا فقط وجد عدد حقيقي r

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} = U_n + r \quad \text{بحيث}$$

r يسمى أساس المتتالية.

ملاحظات:

(a) تكون المتتالية (U_n) حسابية إذا فقط إذا كان فرق حدين متتابعين ثابت. وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

(b) لكي نبين أن (U_n) حسابية نقوم بحساب $u_{n+1} - u_n$

ونجد $u_{n+1} - u_n = cte$ وتكون الثابتة هي الأساس.

(2) الحد العام:

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

$$\text{لدينا } (\forall n \in \mathbb{N}) \left\{ u_n = u_0 \cdot q^n \right\}.$$

ملاحظة:

(1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

(2) بصفة عامة: إذا كان u_p حد من متتالية هندسية

$$\text{أساسها } q \text{ فإن } \left\{ u_n = u_p \cdot q^{n-p} \right\}$$

(ترتيب p غير مهم).

(3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

لتكن (U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0 .

مع $(q \neq 1)$.

$$S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

u_0 : الحد الأول للمجموع S .

$(n+1)$: عدد حدود المجموع S .

ملاحظة:

(1) إذا كان $q = 1$ فإن $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0$

$$(2) \quad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad : q \neq 1$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

بصفة عامة

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \cdot \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

(IV) نهاية متتالية.

(1) $\lim q^n$

$$\lim q^n = \begin{cases} 0 & ; \quad -1 < q < 1 \\ 1 & ; \quad q = 1 \\ +\infty & ; \quad q > 1 \\ \text{غير موجودة} & ; \quad q \leq -1 \end{cases}$$

(2) مصادق التقارب.

(a) لتكن (U_n) و (V_n) بحيث $|U_n - l| \leq V_n$ انطلاقاً من صف ما.

$$\lim V_n = 0 \Rightarrow \lim U_n = l$$

(b) لتكن (U_n) و (V_n) بحيث $U_n \leq V_n$ انطلاقاً من صف ما

$$\lim V_n = -\infty \Rightarrow \lim U_n = -\infty \quad \text{و} \quad \lim U_n = +\infty \Rightarrow \lim V_n = +\infty$$

(c) لتكن (U_n) و (V_n) و (W_n) بحيث $V_n \leq U_n \leq W_n$ انطلاقاً من

صف ما.

$$\lim V_n = \lim W_n = l \Rightarrow \lim U_n = l$$

(3) نقول إن متتالية (U_n) متقاربة إذا كانت نهايتها عدد حقيقي.

ونقول إنها متباعدة في الحالات الأخرى.

(4) التقارب والترتيب.

(a) لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين بحيث $U_n \leq V_n$ (أو $V_n < U_n$)

انطلاقاً من صف ما إذا كانت (U_n) و (V_n) متقاربتين

$$\text{فإن } \lim U_n \leq \lim V_n.$$

(b) كل متتالية تزايدية ومكبورة متقاربة.

(c) كل متتالية تناقصية ومصغورة متقاربة.

(5) المتتاليات الترجعية

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

لتكن f دالة معرفة على I ونعتبر المتتالية $\begin{cases} U_0 \in I \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

(* إذا كانت $f(I) \subset I$ فإن المتتالية معرفة.

(* إذا كانت f متصلة على I و (U_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق

$$f(l) = l$$