

تمرين رقم 1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{5x+2}{x+3}$

و نضع $I = [2, 3]$

1- بين أن $f(I) \subseteq I$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{n+1} = f(U_n) \\ U_0 = \frac{5}{2} \end{array} \right. \quad (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية بحيث بما يلي:}$$

أ- بين أن $2 \leq U_n \leq 3$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

ج- استنتج أن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

تمرين رقم 2

لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

1- أدرس رتبة f على $I = [0, 1]$ و بين أن $f(I) \subset I$

2- بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في I

2- لتكن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية بحيث: $V_0 = \frac{1}{2}$ و $V_{n+1} = f(V_n)$

أ- أحسب V_1 بين أن $0 \leq V_n \leq 1$ لكل n من \mathbb{N}

ب- بين أن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية

ج- استنتج أن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها

تمرين رقم 3

f دالة معرفة على $I = [0, \sqrt[3]{3}]$ ب: $f(x) = \frac{9x}{x^3+6}$

1- أدرس تغيرات الدالة f و بين أن $f(I) = I$

2- $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية بحيث: $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أن $0 < U_n < \sqrt[3]{3}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب- بين أن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية

ج- استنتج أن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها

تمرين رقم 4

لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بما يلي:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{n+1} = 2 + \frac{1}{U_n} - \frac{2}{U_n^2} \\ U_0 = 3 \end{array} \right.$$

1. بين أن $U_n \geq 2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

2. أدرس رتبة $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و استنتج أن $2 \leq U_n \leq 3$

3. بين أن $0 < U_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(U_n - 2)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

4. بين أن $0 < U_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ثم حدد نهاية

المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

تمرين رقم 4

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{n+1} = U_n + \frac{1+U_n}{1+2U_n} \\ U_0 = 1 \end{array} \right. \quad (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية عددية معرفة بما يلي:}$$

1- أ- بين أن $U_n > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

2- أ- بين أن $U_{n+1} \geq U_n + \frac{1}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب- أثبت أن $U_n \geq 1 + \frac{n}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

تمرين رقم 5

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 2}{u_n + 1} \end{array} \right. \quad \text{لتكن } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية معرفة ب:}$$

أ- بين أن $u_n \leq -2$ لكل n من \mathbb{N}

أ- أدرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

أ- بين أن $u_{n+1} \leq u_n - \frac{1}{2}$ لكل n من \mathbb{N}

أ- استنتج أن $u_n \leq -\frac{1}{2}n - 3$ لكل n من \mathbb{N}

أ- حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

تمرين رقم 6

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{5}(U_n - 4n - 1) \end{array} \right. \quad \text{نعتبر المتتالية } (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ بحيث:}$$

و نضع $V_n = U_n + n - 1$ لكل n من \mathbb{N}

(1) أ- بين أن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

ب- أحسب V_n و U_n بدلالة n

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(2) نضع $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

و $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

بين أن $T_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$ و أن $S_n = T_n - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$