

## سلسلة تمارين حول المتتاليات العددية

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 6; \forall n \geq 1 \end{cases}$$

**تمرين 1:** نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

1. أحسب  $u_2$  و  $u_3$ .
- لتكن  $(v_n)_{n \geq 1}$  المتتالية المعرفة بما يلي:  $v_n = u_n + 18$ .
2. بين أن المتتالية  $(v_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية محددًا أساسها و حدها الأول.
3. حدد  $v_n$  بدلالة  $n$ ، ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$ .
4. أحسب  $\lim u_n$ .

$$\begin{cases} u_1 = \frac{11}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{4} \end{cases}$$

**تمرين 2:** نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

و نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي:  $v_n = -1 + 2u_n; \forall n \geq 1$ .

1. أحسب  $v_1$ .
2. برهن أن  $(v_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ .
3. عبر عن  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة  $n$ .

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \geq 0; \end{cases} \quad u_{n+1} = 2u_n - 3$$

**تمرين 3:** نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:

برهن بالترجع أن:  $\forall n \geq 0; u_n = 3 - 2^n$ .

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

**تمرين 4:** نضع:

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$ .
2. برهن بالترجع أن:  $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \neq -1$ .
3. نضع:  $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$ .

(a) بين أن متتالية هندسية محددًا أساسها و حدها الأول.

(b) أحسب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم أحسب:  $\lim v_n$ .

(c) أحسب  $u_n$  بدلالة  $n$  ثم أحسب:  $\lim u_n$ .

$$\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

**تمرين 5:** نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

1. بين أن:  $\forall n \geq 0; u_n \geq 2$ .
2. بين أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية تناقصية.
3. استنتج أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة.
4. أحسب  $\lim u_n$ .

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

**تمرين 6:** نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

1. أحسب  $u_2$  و  $u_3$ .

2. نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي:  $v_n = u_n - 3$ .  
 أ. برهن أن  $(v_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية محددًا أساسها وحدها الأول.  
 ب. عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم عن  $u_n$  بدلالة  $n$ .  
 ج. أحسب  $\lim v_n$  ثم  $\lim u_n$ .

**تمرين 7:** نعتبر المتتالية المعرفة كالآتي:  $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 ; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n ; \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$ ، و المتتالية المعرفة ب:

$$w_n = 5^n u_n ; \forall n \in \mathbb{N} \text{ ، و } v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

1. أ. بين أن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية هندسية.  
 ب. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$ .
2. أ. بين أن  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية حسابية.  
 ب. أكتب  $w_n$  بدلالة  $n$ .  
 ج. استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$ .
3. أ. بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ .  
 ب. استنتج أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ .  
 ج. أحسب  $\lim u_n$ .

**تمرين 8:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كالآتي:  $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{3}} ; n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$

1. أحسب  $u_1$ .
2. بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n < 2\sqrt{3}$ .
3. بين أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تزايدية قطعاً. ماذا تستنتج؟
4. نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة ب  $v_n = 12 - u_n^2$ .  
 أ. بين أن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية هندسية محددًا أساسها وحدها الأول.  
 ب. أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  و استنتج  $\lim u_n$ .

**تمرين 9:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كالآتي:  $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8}} ; n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$

1. بين بالترجع أن:  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ .
2. بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} ; \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ، ماذا تستنتج؟
3. نضع:  $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}$ .  
 (a) بين أن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية هندسية محددًا أساسها.  
 (b) أحسب  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(c) أحسب  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k^3$  بدلالة  $n$ .

**تمرين 10:** نعتبر المتتاليتين المعرفتين كالآتي:

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

نضع:  $\forall n \in \mathbb{N}^*; w_n = u_n - v_n$

1. بين أن  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متتالية هندسية و حدد أساسها.

2. أكتب  $w_n$  بدلالة  $n$ .

3. أحسب  $\lim w_n$ .

4. أحسب  $s_n = \sum_{k=1}^n w_k$ ، ثم حدد  $\lim s_n$ .

5. أكتب  $u_{n+1} - u_n$  بدلالة  $w_n$  واستنتج  $u_{n+1}$  بدلالة  $n$ .

**تمرين 11:**

1. أدرس تغيرات الدالة  $f(x) = \frac{6x+5}{x+2}$  على  $I = [1; 5]$ .

2. نعتبر المتتالية المعرفة كالتالي:  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{6u_n + 5}{u_n + 2}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(a) بين أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تزايدية قطعاً.

(b) بين أن:  $(\forall n \in \mathbb{N}; u_n < 5)$ .

(c) استنتج أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة و أحسب  $\lim u_n$ .

**تمرين 12:**

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $]1, +\infty[$  ب:  $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

1. بين أن:  $\forall x \in ]2, +\infty[; g(x) \geq 3$ .

2. لتكن المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كالتالي:  $\begin{cases} u_0 = \frac{7}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n); \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(a) بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n \geq 3$ .

(b) بين أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  رتيبة و استنتج أنها متقاربة.

(c) أحسب  $\lim u_n$ .