سلسلة 1	المتتاليات العددية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية

تمرين 1 : $; n \geq 0 \quad u_0 = 2 \,;\, u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1$ ، $v_n = u_n - \frac{5}{3}$

1

$u_1 = \frac{2}{5}u_0 + 1$ $u_1 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}$	$u_2 = \frac{2}{5}u_1 + 1$ $u_2 = \frac{18}{25} + 1 = \frac{43}{25}$	$u_3 = \frac{2}{5}u_2 + 1$ $u_3 = \frac{86}{125} + 1 = \frac{211}{125}$	$u_4 = \frac{2}{5}u_3 + 1$ $u_4 = \frac{422}{625} + 1 = \frac{1047}{125}$

الهدف من السؤال هو أن تعلم أن حساب أحد حدود المتتاليات الترجعية يتطلب حساب كل الحدود التي قبله.

2

أ) لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n + 1 - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}\left(v_n + \frac{5}{3}\right) - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}v_n$

إذن v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ و حدها الأول : $v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

لاحظ أن $v_n = u_n - \frac{5}{3}$ تعطي: $u_n = v_n + \frac{5}{3}$ و استعملناها لأننا نبحث عن كتابة v_{n+1} بدلالة v_n

ب) $$\boxed{v_n = v_0\, q^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

ج) $$\boxed{u_n = v_n + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}}$$

$$\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}\times 0 + \frac{5}{3} = \frac{5}{3}}$$

تذكير: أن $\lim_{n\mapsto+\infty} a^n = 0$ حيث : $-1 < a < 1$

تمرين 2 : $; n \geq 0 \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + n^2\right) \,;\, u_0 = \frac{5}{2}$ ، $v_n = u_n - \left(\frac{n^2 - 3n + 3}{2}\right) \quad \forall n \in IN$

1 أ)

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \left(\frac{(n+1)^2 - 3(n+1) + 3}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(u_n + n^2\right) - \frac{n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 3}{2} = \frac{u_n + n^2}{3} - \frac{n^2 - n + 1}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{2u_n + 2n^2 - 3n^2 + 3n - 3}{6} = \frac{2u_n - n^2 + 3n - 3}{6} = \frac{2\left(v_n + \frac{n^2 - 3n + 3}{2}\right) - n^2 + 3n - 3}{6}$$

$$v_{n+1} = \frac{2v_n + n^2 - 3n + 3 - n^2 + 3n - 3}{6} = \frac{1}{3}v_n$$

إذن v_n متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{1}{3}}$ و حدها الأول : $\boxed{v_0 = u_0 - \frac{0 - 0 + 3}{2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1}$

2 ب)

$$\boxed{v_n = v_0\, q^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$\boxed{u_n = v_n + \frac{n^2 - 3n + 3}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{n^2 - 3n + 3}{2}}$$

$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$ ، لأن: $\lim_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ و $\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{n^2 - 3n + 3}{2} = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{2}n^2 = +\infty$

3

S_n يمثل مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ إذن :

$$\boxed{S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)}$$

و

$$\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty} S_n = \frac{3}{2}(1 - 0) = \frac{3}{2}}$$

انتبه لعدد الحدود : $n + 1 - 0 = n + 1$

تمرين 3 : $;\ n\geq 0\quad u_0=-1\ ;\ u_{n+1}=\dfrac{9}{6-u_n}$ ، $\forall n\in IN\quad v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$

1

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0=-1$ و $-1<3$
- نفترض أن $u_n<3$ و نبين أن $u_{n+1}<3$ ، لدينا :

$$u_n<3\ \Rightarrow -u_n>-3\ \Rightarrow 6-u_n>6-3\ \Rightarrow 6-u_n>3\ \Rightarrow \frac{1}{6-u_n}<\frac{1}{3}\ \Rightarrow \frac{9}{6-u_n}<3\ \Rightarrow u_{n+1}<3$$

بالتالي وحسب مبدأ التراجع فإن: $\boxed{\forall n\in IN\quad u_n<3}$

2

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{9}{6-u_n}-u_n=\dfrac{9-6u_n+u_n^2}{6-u_n}=\dfrac{(3-u_n)^2}{6-u_n}$

وبما أن : $6-u_n>3>0$ فإن : $u_{n+1}-u_n\geq 0$ ، بالتالي (u_n) تزايدية.

3

أ)

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-3}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{1}{\dfrac{9}{6-u_n}-3}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{1}{\dfrac{9-18+3u_n}{6-u_n}}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{6-u_n}{3u_n-9}-\frac{1}{u_n-3}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{6-u_n}{3(u_n-3)}-\frac{3}{3(u_n-3)}=\frac{3-u_n}{3(u_n-3)}=\frac{-1}{3}$$

إذن v_n متتالية حسابية أساسها : $\boxed{r=\dfrac{-1}{3}}$ وحدها الأول : $\boxed{v_0=\dfrac{1}{u_0-3}=\dfrac{-1}{4}}$

ب)

$$\boxed{v_n=v_0+rn=\frac{-1}{4}+\frac{-1}{3}n}$$

$$\boxed{v_n=\frac{1}{u_n-3}\ \Rightarrow \frac{1}{v_n}=u_n-3\Rightarrow u_n=\frac{1}{v_n}+3=\frac{1}{\dfrac{-1}{4}+\dfrac{-1}{3}n}+3}$$

$$\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{\dfrac{-1}{4}+\dfrac{-1}{3}n}+3=0+3=3}$$

4

S_n يمثل مجموع حدود متتالية حسابية أساسها $r=\dfrac{-1}{3}$ إذن :

$$\boxed{S_n=v_0+v_1+....+v_n=(n+1)\frac{v_0+v_n}{2}=(n+1)\frac{\dfrac{-1}{4}+\dfrac{-1}{4}-\dfrac{1}{3}n}{2}=\frac{(n+1)\left(\dfrac{-1}{2}-\dfrac{n}{3}\right)}{2}}$$

$\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty}S_n=-\infty}$ (لأن : $\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty}n+1=+\infty}$ و $\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty}\dfrac{-1}{2}-\dfrac{n}{3}=+\infty}$)

تمرين 4 : $;\ n\geq 1\quad u_1=1\,;\,u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}$ ، $\forall n\in IN^*\quad v_n=u_n^2-4$

1

أ)

لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}^2-4=\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}\right)-4=\dfrac{u_n^2+12}{4}-4=\dfrac{u_n^2+12-16}{4}=\dfrac{u_n^2-4}{4}=\dfrac{1}{4}v_n$

إذن v_n متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\dfrac{1}{4}}$ وحدها الأول : $\boxed{v_1=u_1^2-4=1-4=-3}$

ب)

$$\boxed{v_n=v_1\,q^{n-1}=-3\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$\boxed{v_n=u_n^2-4\Rightarrow\ u_n^2=v_n+4\Rightarrow\ u_n=\sqrt{v_n+4}=\sqrt{-3\left(\frac{1}{4}\right)^n+4}}$$

$$\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\sqrt{-3\left(\frac{1}{4}\right)^n+4}=\sqrt{-3\times0+4}=2}$$

انتبه للحد العام للمتالية الهندسية v_n لأنه لدينا في هذا التمرين الحد الأول v_1 وليس v_0 ، أيضا

$u_n\geq 0$ لأن $u_n^2=v_n+4\Rightarrow\ u_n=\sqrt{v_n+4}$

	S_n يمثل مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ إذن : $$\boxed{S_n=v_1+....+v_n=v_1\frac{1-q^n}{1-q}=-3\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=-3\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}}=-4\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}$$ منه : $$\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty} S_n=\lim_{n\mapsto+\infty}-4\left(1-\frac{1}{4^n}\right)=-4(1-0)=-4}$$	2

رياضيـــات النجــــــــاح أذ سمير لخريسي