سلسلة 2	المتتاليات العددية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية

تمرين 1 : $u_0 = 1 \ ; \ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n^2+5} \quad ; n \geq 0$

1

لنبين بالترجع أن $u_n > 0 \quad \forall n \in IN$

- بالنسبة لـ $n = 0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0 = 1$ و $1 > 0$
- نفترض أن $u_n > 0$ و نبين أن $u_{n+1} > 0$

لدينا : $u_n > 0 \Rightarrow \dfrac{u_n}{n^2+5} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$ ، بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن : $\boxed{\forall n \in IN \quad u_n > 0}$

2

لنبين أن $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{5} u_n \quad \forall n \in IN$

لدينا : $u_{n+1} - \dfrac{1}{5}u_n = \dfrac{u_n}{n^2+5} - \dfrac{1}{5}u_n = u_n\left(\dfrac{1}{n^2+5} - \dfrac{1}{5}\right) = u_n\left(\dfrac{5-n^2-5}{5(n^2+5)}\right) = \dfrac{-n^2 u_n}{5(n^2+5)} < 0$ (لأن $u_n > 0$)

يمكن بسهولة و باستعمال التأطير إثبات المتفاوتة المطلوبة، لكن الطريقة المستعملة تعتبر أفضل لكونها أعم، إذ في بعض الحالات يكون حساب الفرق و تحديد إشارته الطريقة الوحيدة

3

لنبين أن : $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^n \quad \forall n \in IN^*$ ، المتفاوتة $0 \leq u_n$ سبق إثباتها في السؤال الأول

طريقة 1

لنبين بالترجع أن $u_n \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^n \quad \forall n \in IN^*$

- بالنسبة لـ $n = 1$ العبارة صحيحة لأن : $u_1 = \dfrac{u_0}{0+5} = \dfrac{1}{5}$ و $\dfrac{1}{5} \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^1$
- نفترض أن $u_n \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ و نبين أن $u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$

لدينا $u_n \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ إذن : $\dfrac{1}{5}u_n \leq \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

أي $\dfrac{1}{5}u_n \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$

و نعلم أن: $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{5}u_n$ (حسب السؤال السابق)

إذن : $u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}$

طريقة 2

نعلم أن: $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{5}u_n$ (حسب السؤال السابق)

إذن :
$$\begin{cases} u_1 \leq \dfrac{1}{5}u_0 \\ u_2 \leq \dfrac{1}{5}u_1 \\ \ldots \leq \ldots \\ \ldots \leq \ldots \\ u_n \leq \dfrac{1}{5}u_{n-1} \end{cases}$$

منه :

$$u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^n u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$$

منه : $u_n \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^n u_0$ بالتالي : $u_n \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

يجب الانتباه أثناء استعمال الطريقة الثانية، إذ يجب التحقق أن جميع أطراف المتفاوتات موجبة و أيضا تحديد عدد المتفاوتات لأن هذا العدد يمثل أس القوة $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

4

لدينا : $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^n \quad \forall n \in IN^*$ و $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$ و $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 0 = 0$

إذن حسب مصاديق التقارب : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$ بالتالي u_n متقاربة نهايتها 0.

لاحظ أننا قمنا أولا بحساب النهاية و هو ما أثبت مباشرة تقارب المتتالية، و ذلك لأن السؤال لم يحدد إجبارية إثبات التقارب أولا (واو العطف يمكنك من اختيار الترتيب الذي تريد)

تمرين 2 : $u_0=-3\ ;\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+12}\quad ; n\geq 0$

1	لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN\quad u_n<4$ • بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0=-3$ و $-3<4$ • نفترض أن $u_n<4$ و نبين أن $u_{n+1}<4$ لدينا : $u_n<4 \Rightarrow u_n+12<16 \Rightarrow \sqrt{u_n+12}<4 \Rightarrow u_{n+1}<4$ بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن : $\boxed{\forall n\in IN\quad u_n<4}$
2	لنبين أن $\forall n\in IN\quad 4-u_{n+1}\leq \dfrac{4-u_n}{4}$ لدينا : $4-u_{n+1}=4-\sqrt{u_n+12}=\dfrac{(4-\sqrt{u_n+12})(4+\sqrt{u_n+12})}{4+\sqrt{u_n+12}}=\dfrac{16-u_n-12}{4+\sqrt{u_n+12}}=\dfrac{1}{4+\sqrt{u_n+12}}(4-u_n)$ و لدينا : $\dfrac{1}{4+\sqrt{u_n+12}}\leq\dfrac{1}{4}$ إذن : $4-u_{n+1}\leq\dfrac{4-u_n}{4}$
	استعمال الطرح أو الترجع في هذا السؤال لا يسمح بالبرهان بسهولة و ذلك لصعوبة التخلص من الجذر مربع ، لذلك استعملنا المرافق
3	نعلم أن: $\forall n\in IN\quad 0<4-u_{n+1}\leq\dfrac{4-u_n}{4}$ (حسب السؤال السابق) إذن : $\begin{cases} 0<4-u_1\leq\dfrac{4-u_0}{4}\\ 0<4-u_2\leq\dfrac{4-u_1}{4}\\ \dots\leq\dots\\ \dots\leq\dots\\ 0<4-u_n\leq\dfrac{4-u_{n-1}}{4}\end{cases}$ منه : $0<(4-u_1)\times(4-u_2)\times\dots\times(4-u_n)\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^n(4-u_0)\times(4-u_1)\times\dots\times(4-u_{n-1})$ منه : $0<4-u_n\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^n(4-u_0)$ منه : $0<4-u_n\leq 7\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ منه : $4-7\left(\dfrac{1}{4}\right)^n<u_n\leq 4$ و بما أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 4-7\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=4-0=4$ و $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 4=4$ فإن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=4$
	لاحظ أن فكرة حل التمرين تم التطرق إليها في التمرين السابق.

تمرين 3 : $u_0=4\ ;\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n^2-3}{u_n+2}\quad ; n\geq 0$

1	لنبين بالترجع أن : $\forall n\in IN\quad u_n>3$ • بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0=4$ و $4>3$ • نفترض أن $u_n>3$ و نبين أن $u_{n+1}>3$ لدينا : $u_{n+1}-3=\dfrac{2u_n^2-3}{u_n+2}-3=\dfrac{2u_n^2-3-3u_n-6}{u_n+2}=\dfrac{2u_n^2-3u_n-9}{u_n+2}$ لنعمل الحدودية : $2t^2-3t-9$ ، محددتها هي : $\Delta=3^2-4\times2\times(-9)=9+72=81$ منه : $t_1=\dfrac{3+9}{4}=3$ و $t_1=\dfrac{3-9}{4}=\dfrac{-3}{2}$ منه : $2t^2-3t-9=2(t-t_1)(t-t_2)=2\left(t+\dfrac{3}{2}\right)(t-3)=(2t+3)(t-3)$ منه : $u_{n+1}-3=\dfrac{(2u_n+3)(u_n-3)}{u_n+2}$ و لدينا حسب الافتراض : $u_n>3$ أي $u_n-3>0$

إذن: $u_{n+1}-3>0$ أي $u_{n+1}>3$ ،، بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن: $\boxed{\forall n\in IN \quad u_n>3}$

2

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n^2-3}{u_n+2}-u_n=\dfrac{2u_n^2-3-u_n^2-2u_n}{u_n+2}=\dfrac{u_n^2-2u_n-3}{u_n+2}$

لنعمل الحدودية: t^2-2t-3 ، محددتها هي: $\Delta=2^2-4\times1\times(-3)=4+12=16$

منه: $t_1=\dfrac{2+4}{2}=3$ و $t_2=\dfrac{2-4}{2}=-1$ منه: $t^2-2t-3=1(t-t_1)(t-t_2)=(t+1)(t-3)$

منه: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n+1)(u_n-3)}{u_n+2}>0$ (لأن: $u_n>3$) بالتالي u_n تزايدية قطعا

لاحظ من خلال هذا السؤال و السؤال السابق أهمية تعميل حدودية من الدرجة الثانية في تحديد إشارة فرق.

3

$$u_{n+1}-3-\frac{9}{5}(u_n-3)=\frac{(2u_n+3)(u_n-3)}{u_n+2}-\frac{9}{5}(u_n-3)=(u_n-3)\left(\frac{2u_n+3}{u_n+2}-\frac{9}{5}\right)$$

$$u_{n+1}-3-\frac{9}{5}(u_n-3)=(u_n-3)\left(\frac{10u_n+15-9u_n-18}{5(u_n+2)}\right)$$

$$u_{n+1}-3-\frac{9}{5}(u_n-3)=(u_n-3)\left(\frac{u_n-3}{5(u_n+2)}\right)=\frac{(u_n-3)^2}{5(u_n+2)}>0$$

بالتالي: $\forall n\in IN \quad u_{n+1}-3>\dfrac{9}{5}(u_n-3)$

لاحظ أن حساب الفرق و تحديد إشارة يعتبر من بين أهم طرق البرهان في مثل هذه الحالات.

4

لنبين أن: $\forall n\in IN \quad u_n\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n+3$

طريقة 1

لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN \quad u_n\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n+3$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن:
- $u_0=4$ و $\left(\dfrac{9}{5}\right)^0+3=1+3=4$
- نفترض أن $u_n\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n+3$ و نبين أن $u_{n+1}\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^{n+1}+3$

لدينا $u_n\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n+3$ إذن: $u_n-3\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n$ أي

$$\frac{9}{5}(u_n-3)\geq\left(\frac{9}{5}\right)^{n+1}$$

و نعلم أن: $u_{n+1}-3>\dfrac{9}{5}(u_n-3)$ (حسب السؤال السابق)

إذن: $u_{n+1}-3\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^{n+1}$ أي: $u_{n+1}\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^{n+1}+3$

طريقة 2

نعلم أن: $u_{n+1}-3>\dfrac{9}{5}(u_n-3)$ (حسب السؤال السابق)

إذن: $\begin{cases} u_1-3\geq\frac{9}{5}(u_0-3) \\ u_2-3\geq\frac{9}{5}(u_1-3) \\ \ldots\geq\ldots \\ \ldots\geq\ldots \\ u_n-3\geq\frac{9}{5}(u_{n-1}-3) \end{cases}$

و بضرب المتفاوتات طرفا بطرف ثم الاختزال

نجد أن: $u_n-3\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n(u_0-3)$

أي $u_n-3\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n$ بالتالي: $u_n\geq\left(\dfrac{9}{5}\right)^n+3$

يجب الانتباه أثناء استعمال الطريقة الثانية، إذ يجب التحقق أن جميع أطراف المتفاوتات موجبة و أيضا تحديد عدد المتفاوتات لأن هذا العدد يمثل أس القوة $\left(\dfrac{9}{5}\right)^n$

5

لدينا: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\dfrac{9}{5}\right)^n=+\infty$ (لأن: $\dfrac{9}{5}>1$) إذن: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\dfrac{9}{5}\right)^n+3=+\infty$

بالتالي و حسب مصاديق التقارب فإن: $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=+\infty}$ و هذا يعني أن u_n ليست متقاربة.

تمرين 4 : $u_0=1\ ;\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n}+2\right)\quad ;n\geq 0$

1

لنبين بالترجع أن $\forall n\in IN\quad 1\leq u_n<4$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0=1$ و $1\leq 1<4$
- نفترض أن $1\leq u_n<4$ و نبين أن $1\leq u_{n+1}<4$

لدينا :

$$1\leq u_n<4\ \Rightarrow\ \begin{cases}1\leq u_n<4\\ 1\leq\sqrt{u_n}<2\end{cases}\ \Rightarrow\quad 1+1+2\leq u_n+\sqrt{u_n}+2<4+2+2$$

$$\Rightarrow\quad 2\leq\frac{u_n+\sqrt{u_n}+2}{2}<4\quad\Rightarrow\quad 2\leq u_{n+1}<4$$

بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن: $\boxed{\forall n\in IN\quad 1\leq u_n<4}$

2

لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n}+2\right)-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n}+2-2u_n\right)$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(-u_n+\sqrt{u_n}+2\right)=\frac{1}{2}\left(-\left(\sqrt{u_n}\right)^2+\sqrt{u_n}+2\right)$$

لنعمل الحدودية : $-t^2+t+2$ ، محددتها هي : $\Delta=1^2-4\times(-1)\times 2=1+8=9$

منه : $t_1=\frac{-1+3}{-2}=-1$ و $t_2=\frac{-1-3}{-2}=2$

منه : $-t^2+t+2=-1(t-t_1)(t-t_2)=-(t+1)(t-2)=(t+1)(2-t)$

منه : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n}+1\right)\left(2-\sqrt{u_n}\right)>0$ (لأن : $\sqrt{u_n}<2$) بالتالي : u_n تزايدية قطعا

سؤال يتطلب التفكير ، لأنه من الصعب التعرف على الحدودية انطلاقا من الشكل $-u_n+\sqrt{u_n}+2$

3

لنبين أن : $\forall n\in IN\quad 0<4-u_{n+1}<\frac{2}{3}\left(4-u_n\right)$

المتفاوتة $0\leq 4-u_{n+1}$ سبق إثباتها في السؤال الأول ، لدينا :

$$4-u_{n+1}=4-\frac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n}+2\right)=\frac{1}{2}\left(8-u_n-\sqrt{u_n}-2\right)=\frac{1}{2}\left(6-u_n-\sqrt{u_n}\right)=\frac{1}{2}\left(-\left(\sqrt{u_n}\right)^2-\sqrt{u_n}+6\right)$$

لنعمل الحدودية : $-t^2-t+6$ ، محددتها هي : $\Delta=1^2-4\times(-1)\times 6=1+24=25$

منه : $t_1=\frac{1+5}{-2}=-3$ و $t_2=\frac{1-5}{-2}=2$

منه : $-t^2-t+6=-1(t-t_1)(t-t_2)=-(t+3)(t-2)=(t+3)(2-t)$

منه : $4-u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n}+3\right)\left(2-\sqrt{u_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n}+3\right)\times\frac{\left(2-\sqrt{u_n}\right)\left(2+\sqrt{u_n}\right)}{2+\sqrt{u_n}}=\frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{u_n}+3\right)(4-u_n)}{2+\sqrt{u_n}}$

إذن :

$$\left(4-u_{n+1}\right)-\frac{2}{3}(4-u_n)=(4-u_n)\left[\frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{u_n}+3\right)}{2+\sqrt{u_n}}-\frac{2}{3}\right]$$

$$\left(4-u_{n+1}\right)-\frac{2}{3}(4-u_n)=(4-u_n)\left[\frac{3\sqrt{u_n}+9-8-4\sqrt{u_n}}{6\left(2+\sqrt{u_n}\right)}\right]=(4-u_n)\left[\frac{1-\sqrt{u_n}}{6\left(2+\sqrt{u_n}\right)}\right]<0$$

(لأن : $1<\sqrt{u_n}$) ، بالتالي : $\forall n\in IN\quad 0<4-u_{n+1}<\frac{2}{3}\left(4-u_n\right)$

سؤال أكثر صعوبة لكونه يتطلب زيادة على التعميل استخراج التعبير $4-u_n$ من خلال استعمال المرافق

4

من أجل حساب النهاية سنؤطر u_n

نعلم أن: $0<4-u_{n+1}<\frac{2}{3}(4-u_n)$ $\forall n\in IN$ (حسب السؤال السابق) إذن :

$$\begin{cases} 0<4-u_1<\frac{2}{3}(4-u_0) \\ 0<4-u_2<\frac{2}{3}(4-u_1) \\ \dots<\dots<\dots \\ \dots<\dots<\dots \\ 0<4-u_n<\frac{2}{3}(4-u_{n-1}) \end{cases}$$

و بضرب المتفاوتات طرفا بطرف ثم الاختزال نجد أن : $0<4-u_n<\left(\frac{2}{3}\right)^n\times(4-u_0)$

منه : $0<4-u_n<3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ منه : $4-3\left(\frac{2}{3}\right)^n<u_n<4$

بما أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 4-2\left(\frac{2}{3}\right)^n=4-0=4$ (لأن : $-1<\frac{2}{3}<1$) و حسب مصاديق التقارب فإن : $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=4}$

لاحظ أن فكرة حل السؤال سبق التطرق لها في تمارين سابقة، هذا يعني ضرورة الاستفادة مما سبق.

تمرين 5 : $n\geq0$; $u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{u_n+1}$; $u_0=3$ ، $v_n=\frac{1}{u_n-2}$ $\forall n\in IN$

1 لنبين بالترجع أن $u_n>2$ $\forall n\in IN$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن : $u_0=3$ و $3>2$
- نفترض أن $u_n>2$ و نبين أن $u_{n+1}>2$

لدينا : $u_{n+1}-2=\frac{5u_n-4}{u_n+1}-2=\frac{5u_n-4-2u_n-2}{u_n+1}=\frac{3u_n-6}{u_n+1}=\frac{3(u_n-2)}{u_n+1}>0$

بالتالي و حسب مبدأ الترجع فإن : $\boxed{\forall n\in IN \quad u_n>2}$

2 $u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n-4}{u_n+1}-u_n=\frac{5u_n-4-u_n^2-u_n}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+4u_n-4}{u_n+1}=\frac{-(u_n^2-4u_n+4)}{u_n+1}=\frac{-(u_n-2)^2}{u_n+1}<0$

بالتالي : (u_n) تناقصية.

3 بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة بالعدد 2 فهي متقاربة، لتكن ℓ نهايتها أي $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=\ell$

بما أن : $u_n>2$ $\forall n\in IN$ فإن : $\ell\geq2$ (لا نستطيع الاستنتاج أن $\ell>2$)

لدينا : $u_{n+1}=f(u_n)$ $\forall n\in IN$ حيث $f(x)=\frac{5x-4}{x+1}$

بما أن : f متصلة على $[2;+\infty[$ و $f([2;+\infty[)\subset[2;+\infty[$

(لأن: $f(x)\geq-2 \Rightarrow x\geq2 \Rightarrow f(x)-2=\frac{5x-4}{x+1}-2=\frac{5x-4-2x-2}{x+1}=\frac{3x-6}{x+1}=\frac{3(x-2)}{x+1}\geq0$)

فإن ℓ هو حل المعادلة : $\ell=f(\ell)$ منه : $\ell=\frac{5\ell-4}{\ell+1}$ منه : $\ell^2+\ell=5\ell-4$ منه : $\ell^2-4\ell+4=0$

منه : $(\ell-2)^2=0$ بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=\ell=2}$

لاحظ أن المتفاوتة $\ell\geq2$ لم تفدنا في هذا السؤال، لكنها تكون ضرورية في حالات مشابهة لكوننا نحصل على أكثر من قيمة للعدد ℓ

4	أ)	لدينا : $$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{1}{\frac{5u_n-4}{u_n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{1}{\frac{5u_n-4-2u_n-2}{u_n+1}}-\frac{1}{u_n-2}$$ $$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+1}{3u_n-6}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{u_n+1}{3(u_n-2)}-\frac{3}{3(u_n-2)}=\frac{u_n-2}{3(u_n-2)}=\frac{1}{3}$$ إذن v_n متتالية حسابية أساسها : $\boxed{r=\frac{1}{3}}$ وحدها الأول $\boxed{v_0=\frac{1}{u_0-2}=\frac{1}{1}=1}$	
	ب)	حسب السؤال السابق لدينا : $v_n=v_0+rn=1+\frac{1}{3}n$ منه : $v_n=\frac{1}{u_n-2}\Rightarrow\frac{1}{v_n}=u_n-2\Rightarrow u_n=\frac{1}{v_n}+2=\frac{1}{1+\frac{1}{3}n}+2$	
5		$$\boxed{\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{3}n}+2=0+2=2}$$	