



## I. النهايات (تذكير)

## نشاط 1 :

- (1) أذكر بالأشكال الغير المحددة .  
(2) أذكر ببعض خاصيات النهايات و الترتيب .

## جواب :

- (1) الأشكال الغير المحددة هي :

$$(1) (+\infty)+(-\infty) ; (-\infty)+(+\infty) (2) 0 \times (\pm\infty) (3) \frac{\pm\infty}{\pm\infty} (4) \frac{0}{0} (5) 0^0 (6) 1^\infty$$

- (2) نذكر بعض خاصيات النهايات و الترتيب .

و f و g و h دوال عددية حيث :

- إذا كان  $f(x) \leq g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow ?} g(x) = +\infty$
- إذا كان  $f(x) \leq g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow ?} g(x) = -\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = -\infty$

- إذا كان  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = \lim_{x \rightarrow ?} g(x) = l$  فإن  $\lim_{x \rightarrow ?} h(x) = l$  (أو  $x \rightarrow x_0$  أو  $x \rightarrow x_0^\pm$ )

## نشاط 2 :

## 1. تمرين 1 :

الرسم التالي يمثل منحنى دالة f .

أ- حدد مبيانيا  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة f .

ب- استنتج مبيانيا نهايات f عند محداث  $D_f$  و كذلك في 1 .

## 2. تمرين 2 :

أحسب النهايات التالية :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 + 1)^3 (3x + 2)$  و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 - 8x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{|4-2x|} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x + |x+2|$$

## 3. تمرين 3 :

حدد a علما أن f لها نهاية في 3 حيث f معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}} ; x > 3 \\ f(x) = \frac{a}{x-1} ; x \leq 3 \end{cases}$$

## 4. تمرين 4 :

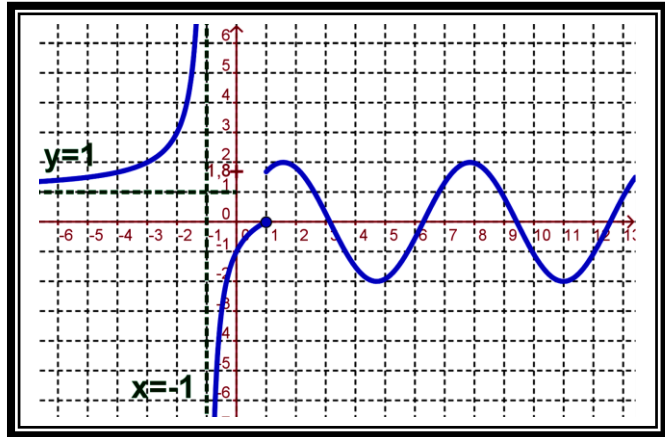
$$\text{أحسب : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \cos x}{1+x^2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$$

## 5. تمرين 5 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-|x-1|}$

أ- حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة f .

ب- أحسب نهايات f عند محداث  $D_f$  .





## II. اتصال دالة عددية في نقطة $x_0$ :

### 01. نشاط 1 :

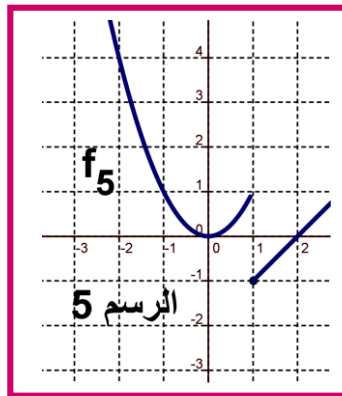
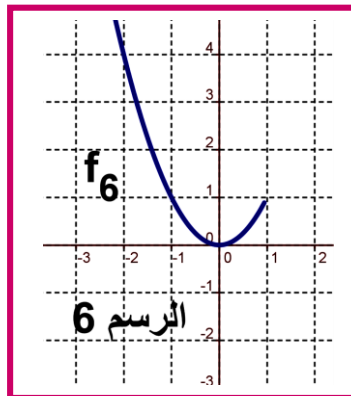
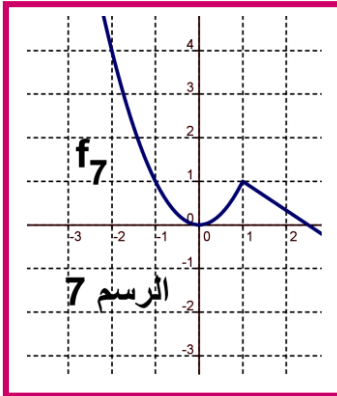
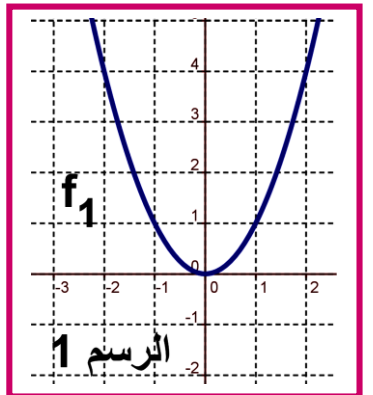
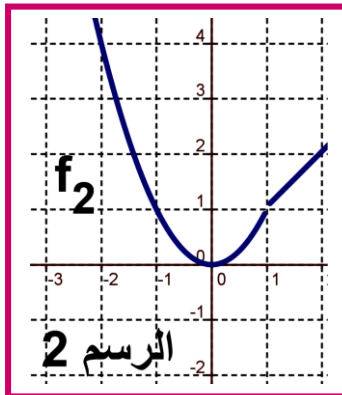
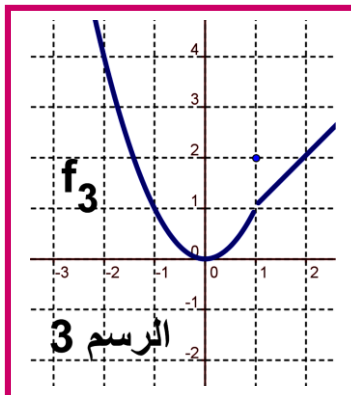
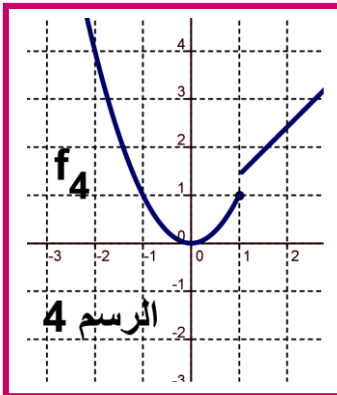
المنحنيات التالية تمثل الدوال  $f_i$  مع  $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ .

(1) نأخذ النقطة التي أفصولها  $x_0 = 1$  ماذا تلاحظ ؟

(2) استنتج مبيانيا  $\lim_{x \rightarrow 1} f_i(x)$  مع  $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$

(3) الرسم 1 و 7 يمثلان دالتين متصلتين في النقطة  $x_0 = 1$  وفي الحالات الأخرى غير متصلة في النقطة  $x_0 = 1$ .

(4) أعط تعريف لاتصال دالة في نقطة  $x_0$ .



### 02. تعريف :

$f$  دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $I_{x_0} = ]x_0 - r, x_0 + r[$  ( $r > 0$ ) (معرفة على مجال مفتوح  $I$  و  $x_0$  من  $I$ ).

$f$  متصلة في  $x_0$  يكافئ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

## III. الاتصال على اليمين والاتصال على اليسار في نقطة $x_0$

### 01. تعريف 1 - 2 :

$f$  دالة عددية معرفة على  $I_d = [x_0, x_0 + r[$  حيث  $r > 0$ .  $f$  متصل على يمين  $x_0$  يكافئ :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$f$  دالة عددية معرفة على  $I_g = ]x_0 - r, x_0]$  حيث  $r > 0$ .  $f$  متصل على يسار  $x_0$  يكافئ :  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$



## 02. أمثلة:

نأخذ النشاط السابق أدرس مبيانيا اتصال بعض من  $f_i$  على يمين و يسار النقطة  $x_0 = 1$  مع  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

## 03. خاصية:

دالة  $f$  متصلة في  $x_0$  يكافئ  $f$  متصل على يسار و على يمين  $x_0$ .

IV. التمديد بالاتصال في النقطة  $x_0$  le prolongement par continuité

## 01. تذكير:

و  $F$  و  $G$  ثلاث مجموعات  $f$  و  $g$  دالتان عدديتان حيث :  $f : E \rightarrow G$  و  $g : F \rightarrow G$ .  
إذا كان  $F \subset E$  و  $\forall x \in F : f(x) = g(x)$ .

•  $f$  تسمى تمديد (prolongement) ل  $g$ .  $g$  تسمى قصور (restriction)  $f$  على  $F$ . نكتب :  $g = f|_F$ .

## 01. تعريف و خاصية:

$f$  دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $I_{x_0}^* = ]x_0 - r, x_0 + r[ \setminus \{x_0\}$  مع  $r > 0$ . حيث :

•  $f$  غير معرفة في  $x_0$

•  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

الدالة  $g$  المعرفة ب :  $\begin{cases} g(x) = f(x) ; x \in D_f, x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$  هي متصلة في  $x_0$ .

الدالة  $g$  تسمى تمديد بالاتصال للدالة  $f$  في النقطة  $x_0$

## 02. مثال:

•  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  لدينا  $f(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1}$

•  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|(|x| - 1)}{|x| - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} |x| = 1$

• وبالتالي الدالة  $g$  المعرفة ب :  $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ g(1) = 1 \end{cases}$  هي تمديد بالاتصال للدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = 1$ .

• كذلك الدالة  $h$  المعرفة ب :  $\begin{cases} h(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ h(-1) = 1 \end{cases}$  هي تمديد بالاتصال للدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = -1$ .



## تمارين : اتصال دالة عددية

- كذلك الدالة  $k$  المعرفة ب:  $k(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1}$ ;  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  هي تمديد بالاتصال للدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = -1$  و في  $x_0 = 1$ .

ملحوظة: يمكن كتابة الدالة  $k$  على الشكل التالي:  $k(x) = |x|$

## V. اتصال دالة على مجال

## 01. تعاريف:

- دالة متصلة على مجال مفتوح  $I = ]a; b[$  يكافئ  $f$  متصلة في كل نقطة  $x_0$  من  $I$ .
- دالة متصلة على مجال  $I = [a, b]$  يكافئ:  $f$  متصلة على  $]a, b[$  و متصلة على يمين  $a$  و متصلة على يسار  $b$ .
- دالة متصلة على مجال  $]a, +\infty[$  يكافئ:  $f$  متصلة في كل نقطة  $x_0$  من  $]a, +\infty[$  و  $f$  متصلة على يمين في  $a$ .

## 02. مثال:

لنعتبر الدالة:  $f(x) = x^2 + 3x$

بين أن:  $f$  متصلة على المجال المفتوح  $I = ]1; 5[$

## VI. اتصال الدوال الاعتيادية:

## 01. خاصية:

- كل دالة حدودية فهي متصلة على مجموعة تعريفها  $D_f = \mathbb{R}$
- كل دالة جذرية فهي متصلة على مجموعة تعريفها  $D_f$ .
- $f(x) = \sin x$  و  $f(x) = \cos x$  متصلتين على  $D_f = \mathbb{R}$ .
- الدالة:  $f(x) = \tan x$  متصلة على  $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$
- الدالة:  $f(x) = \sqrt{x}$  متصلة على مجموعة تعريفها  $D_f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ .
- الدالة:  $f(x) = |x|$  متصلة على مجموعة تعريفها  $D_f = \mathbb{R}$ .

## VII. العمليات على الدوال المتصلة:

## 01. خاصية: (تقبل)

- $I$  مجال ضمن المجموعة  $\mathbb{R}$  ( $I \subset \mathbb{R}$ ).
- إذا كانت  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على المجال  $I$  فإن الدوال:  $f+g$  و  $f \times g$  و  $\alpha f$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) متصلة على  $I$ .
- إذا كانت  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على المجال  $I$  و  $g$  لا تنعدم على المجال  $I$  فإن الدوال:  $\frac{f}{g}$  و  $\frac{1}{g}$  متصلة على  $I$ .

## 02. مثال:

لنعتبر الدوال التالية المعرفة ب: (1)  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} + \cos(x)$  (2)  $g(x) = (x^2 + 3x - 2) \times \sqrt{x}$

(1) حدد مجموعة تعريف واتصال كل دالة من الدوال السابقة.



جواب

1 نحدد مجموعة تعريف:

▪ الدالة  $x \rightarrow \cos x$  معرفة ومتصلة على  $\mathbb{R}$ . الدالة  $x \rightarrow \frac{2x+1}{x-1}$  معرفة ومتصلة على  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .إذن الدالة  $x \rightarrow \frac{2x+1}{x-1} + \cos x$  معرفة ومتصلة على  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$   $D_f = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ▪ الدالة  $x \rightarrow x^2 + 3x - 2$  معرفة ومتصلة على  $\mathbb{R}$ . الدالة  $x \rightarrow \sqrt{x}$  معرفة ومتصلة على  $\mathbb{R}^+$   $[0, +\infty[ = \mathbb{R}^+$ إذن الدالة  $x \rightarrow (x^2 + 3x - 2)\sqrt{x}$  معرفة ومتصلة على  $\mathbb{R}^+$   $D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$ 

.VIII اتصال مركبة دالتين متصلتين:

01. تذكير:  $I \xrightarrow{f} f(I)$  و  $J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$  و  $f(I) \subset J$  $g \circ f: I \xrightarrow{f} f(I) \subset J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$  $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$ 

01. خاصية:

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين عدديتين.

- إذا كانت  $f$  متصلة في  $x_0$  و الدالة  $g$  متصلة في  $f(x_0)$  فإن الدالة  $g \circ f$  متصلة في  $x_0$ .
- إذا كانت  $f$  متصلة على مجال  $I$  و  $g$  متصلة على مجال  $J$  حيث:  $f(I) \subset J$  فإن الدالة  $g \circ f$  متصلة على  $I$ .

02. مثال: أدرس اتصال الدالة  $f(x) = \sin(2x+1)$ .الدالة  $x \rightarrow 2x+1$  متصلة على  $\mathbb{R}$ .الدالة  $x \rightarrow \sin x$  متصلة على  $\mathbb{R}$  و  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$  إذن الدالة:  $x \rightarrow \sin(2x+1)$  متصلة على  $\mathbb{R}$ . (لا نهى مركبة دالتين متصلتين)

03. نتائج:

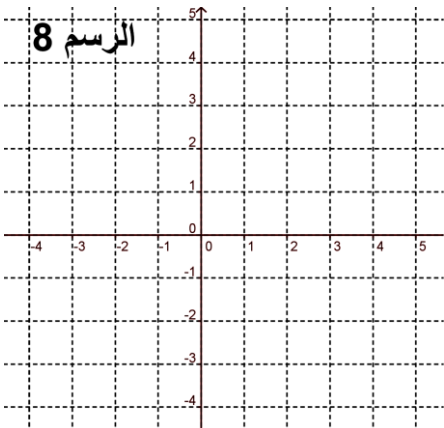
- $f(x) = \sin(ax+b)$  و  $g(x) = \cos(ax+b)$  دالتان متصلتان على  $\mathbb{R}$ .
- الدالة  $h(x) = \tan(ax+b)$  متصلة في كل  $x$  تحقق ما يلي  $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .
- $f$  دالة موجبة و متصلة على المجال  $I$  فإن الدالة  $x \mapsto \sqrt{f(x)}$  متصلة على  $I$ .

IX. دالة الجزء الصحيح:

01. تعريف: (تذكير)

الدالة  $f$  التي تربط كل عنصر  $x$  من  $\mathbb{R}$  بالعدد الصحيح النسبي الوحيد  $p$  الذي يحقق  $p \leq x < p+1$  تسمى الدالة الجزء الصحيح ويرمز لها بـ  $E$  أو أيضا  $[ ]$  نكتب  $f(x) = E(x) = p$  أو  $f(x) = [x] = p$

02. نشاط:

1 أنشئ منحنى الدالة  $f(x) = E(x)$ .2 هل  $f$  متصلة على يمين في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2.



- (3) هل  $f$  متصلة على يسار في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2 .  
 (4) هل  $f$  متصلة في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2 .....  
 (5) هل  $f$  متصلة على  $[0;1[$  و  $[1;2[$  و  $[2;3[$  ....  
 (6) أعط الخاصية.

**03. خاصية:**

- دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين  $p$  وغير متصلة على اليسار  $p$  (إذن هي غير متصلة في  $p$ ).
- دالة الجزء الصحيح متصلة على كل المجالات التي هي على شكل:  $[p, p+1[$  (مع  $p \in \mathbb{Z}$ )

**X. صورة مجال بدالة متصلة :****01. نشاط:**

نأخذ النشاط أول الدرس و الرسم رقم 1 الذي يمثل الدالة:  $f(x) = x^2$

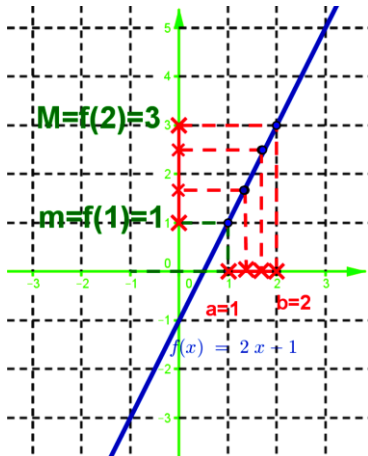
- (1) استنتج مبيانيا صور جميع الأعداد التي تنتمي إلى القطعة  $[0, 2]$   
 (2) استنتج مبيانيا :  $f([-1, 0])$  و  $f([-1, 2])$ . أعط الخاصية.

**02. خاصية:**

- صورة قطعة  $[a, b]$  بدالة متصلة  $f$  هي قطعة (تكون على شكل  $[m, M]$  مع  $m$  و  $M$  هي القيمة الدنيا والقيمة القصوى على التوالي ل  $f$  على المجال  $[a, b]$ ). (أو أيضا :  $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$  و  $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ )
- صورة مجال  $I$  بدالة متصلة  $f$  هي مجال  $J = f(I)$ .
- ملاحظة :  $f([a, b]) = [m, M]$ .

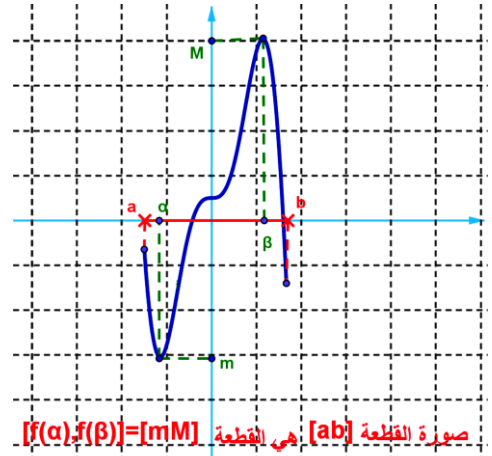
مثال : 2  $f(x) = 2x - 1$  لدينا مبيانيا :  $f([1, 2]) = [1, 3]$

$$f([1, 2]) = [1, 3]$$



مثال : 1  $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$  و  $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$

نضع :  $\exists (\alpha, \beta) \in I^2 / m = f(\alpha)$  و  $M = f(\beta)$



صورة القطعة  $[ab]$  هي القطعة  $[mM]$   $f(\alpha) f(\beta) = [mM]$

**XI. مبرهنة القيم الوسيطة: théorème des valeurs intermédiaires****01. نشاط:**



نأخذ  $a=1$  و  $b=-2$  في الرسم 1؛  $a=0$  و  $b=\pi$  (الرسم 2)

(1) استنتج مبيانيا  $f(a)$  و  $f(b)$ . (الرسم 1)

(2) نأخذ عدد  $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  هل يوجد على الأقل

عنصر  $c$  من  $[a,b] = [-2,1]$  حيث  $f(c) = k$ . (الرسم 1)

(3) أعط الخاصية:

02. خاصية:

$f$  دالة متصلة على القطعة  $[a,b]$ .

▪ لكل عدد حقيقي  $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  يوجد على الأقل عنصر  $c$  من  $[a,b]$  حيث  $f(c) = k$ .

03. نتائج:

▪ بما أن : صورة قطعة  $[a,b]$  بدالة متصلة هي القطعة  $[m,M]$  إذن :  $f([a,b]) = [m,M]$

▪ إذا كان :  $f(a)f(b) < 0$  أي  $f(a)$  و  $f(b)$  ( احدهما موجب و الآخر سالب ) ومنه :  $f([a,b]) = [m,M]$  ومنه  $k=0 \in f([a,b])$  ومنه يوجد

عنصر  $c$  من  $[a,b]$  حيث :  $f(c) = 0$ .

▪ نتيجة ل  $(f(a) \times f(b) < 0)$  : المعادلة :  $f(x) = 0$  /  $x \in [a,b]$  تقبل على الأقل حل على  $[a,b]$ .

XII. دالة متصلة ورتبية قطعا:

01. نشاط:  $f$  دالة متصلة ورتبية قطعا. لدينا صور المجالات الآتية

المجال I	$f$ متصلة و تزايدية قطعا نحدد : المجال $f(I)$	$f$ متصلة و تناقصية قطعا نحدد : المجال $f(I)$	المجال I	$f$ متصلة و تزايدية قطعا نحدد : المجال $f(I)$	$f$ متصلة و تناقصية قطعا نحدد : المجال $f(I)$
$[a,b]$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$	$[a, +\infty[$	$[f(b), f(a)]$	$[f(a), f(b)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a)]$	$]-\infty, a]$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$
$]a, b]$	$[\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)[$	$]-\infty, a[$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)]$
$]a, b[$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$]-\infty, +\infty[$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$
$[a, +\infty[$				$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)]$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$

XIII. الدالة العكسية لدالة متصلة ورتبية على قطعا على مجال:

A. تقابل دالة عددية - التقابل العكسي لدالة :

01. تعريف:

$f$  دالة عددية من  $I$  نحو  $J$ .  $(f : I \rightarrow J)$ .

•  $f$  تسمى دالة تقابل من  $I$  نحو  $J$  يعني كل عنصر  $x$  من  $I$  له صورة وحيدة  $y$  من  $J$  و كل عنصر  $y$  من  $J$  له سابقا وحيدا  $x$  من  $I$

• الدالة  $g$  من  $J$  نحو  $I$  التي تربط كل عنصر  $y$  من  $I$  بالعنصر الوحيد  $x$  من  $I$  حيث  $f(x) = y$  تسمى الدالة العكسية ل  $f$  ؛

و يرمز له ب:  $g = f^{-1}$ . (أي  $(f^{-1} : J \rightarrow I)$ )



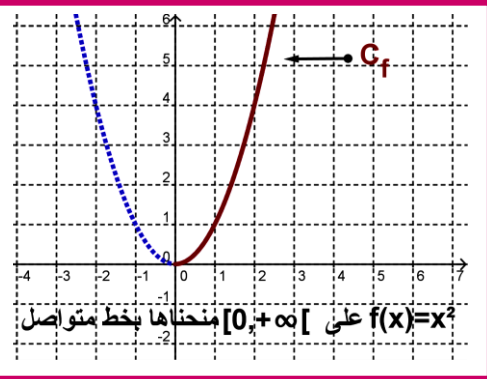
## 02. مثال :

- نعتبر الدالة العددية  $f(x) = x$  هل الدالة تقابل من  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$ .
- هل كل عنصر  $x$  من مجموعة الانطلاق  $\mathbb{R}$  له صورة وحيدة من مجموعة الوصول  $\mathbb{R}$ .
- هل كل عنصر  $y$  من مجموعة الوصول  $\mathbb{R}$  له سابق وحيد من مجموعة الانطلاق  $\mathbb{R}$ .
- ماذا نستنتج؟

## 03. ملحوظة:

- الدالة العكسي  $f^{-1}$  تكتب على الشكل التالي :  
 $f^{-1} : J \rightarrow I$  أو أيضا :  $f^{-1} : J \rightarrow I$   
 $x \mapsto f^{-1}(x)$   $y \mapsto f^{-1}(y)$   
 وذلك باستعمال المتغير  $x$  بدل من  $y$
- العلاقة التي تربط  $f$  و  $f^{-1}$  هي :  $f^{-1}(y) = x$   $\Leftrightarrow$   $\begin{cases} x = f(x) \\ x \in I \end{cases}$   $\Leftrightarrow$   $\begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{cases}$
- لكي نبرهن على أن دالة  $f$  معرفة من  $I$  نحو  $J$  بأنها تقابل من  $I$  إلى  $J$  نبين أن المعادلة  $x \in I : f(x) = y$  لها حل وحيد مع  $J$ .

## 04. مثال :



- نعتبر الدالة العددية  $f(x) = x^2$  على  $I = [0; +\infty[$
- 1. استنتج مبيانيا  $J = f(I)$  (أي صورة المجال  $I$  ب  $f$ ).
- 2. هل لكل عنصر  $y$  من  $J = f(I)$  له سابق وحيد  $c$  من  $I$ . استنتج طبيعة التطبيق  $f$ .
- 3. نعتبر المعادلة :  $x \in I = [0; +\infty[ / f(x) = y$  مع  $y$  معلوم من  $J$ .
- أ- أوجد عدد حلول المعادلة  $(E)$ .
- ب- استنتج الدالة العكسية  $f^{-1}$  ل  $f$ .

## 05. خاصية

$f$  دالة عددية متصلة ورتبية قطعاً على مجال  $I$  و  $y \in f(I)$ .

- الدالة  $f$  هي تقابل من  $I$  إلى  $f(I)$ .
- ليكن  $y$  من  $f(I)$  المعادلة :  $x \in I / f(x) = y$  تقبل حل وحيد على  $I$ .

## 02. نتيجة :

إذا كانت  $f$  دالة متصلة ورتبية قطعاً على المجال  $[a, b]$ .

- فإنه لكل عدد محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  يوجد عدد وحيد  $c$  من  $[a, b]$  حيث :  $f(c) = k$ .
- إذا كان  $f(a) \times f(b) < 0$  المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حل وحيد.

## 06. ملاحظة:

- الدالة  $f$  معرفة كما يلي:  $f : I \rightarrow J = f(I)$   
 $x \rightarrow f(x) = y$
- الدالة  $f^{-1}$  معرفة كما يلي:  $f^{-1} : J = f(I) \rightarrow I$   
 $y \rightarrow f^{-1}(y) = x$





- $f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{cases}$
- $\forall y \in J : f \circ f^{-1}(y) = y \quad \forall x \in I : f^{-1} \circ f(x) = x$
- ويمكن كتابة  $\forall y \in J : f \circ f^{-1}(y) = y$  كذلك على الشكل التالي :  $\forall x \in J : f \circ f^{-1}(x) = x$

**07. خاصيات الدالة العكسية: (تقبل)**

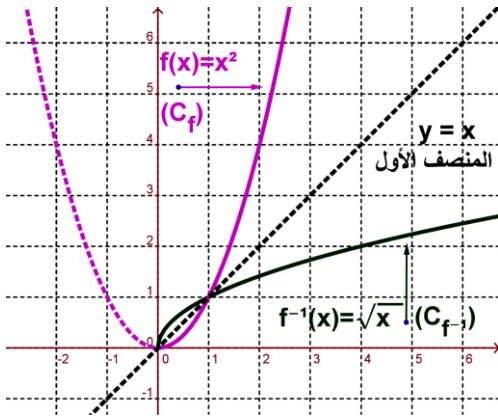
$f$  دالة عددية متصلة ورتيبة قطعاً على مجال  $I$  و  $J = f(I)$  الدالة العكسية ل  $f$ .

1. الدالة  $f^{-1}$  متصلة على المجال  $J = f(I)$ . (تقبل)

2. الدالة  $f^{-1}$  رتيبة قطعاً على المجال  $J$  ولها نفس رتابة  $f$  على  $I$ .

3.  $(C_{f^{-1}})$  منحنى الدالة  $f^{-1}$  و  $(C_f)$  منحنى الدالة  $f$  متماثلان بالنسبة للمستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x$  في معلم متعامد

منظم (المستقيم  $(D)$  يسمى المنصف الأول)

**07. مثال: لتعتبر الدالة  $f$  المعرفة ب:  $f(x) = x^2$** 

1) أ - مبيانيا هل  $f$  متصلة على  $I = [0; +\infty[$

ب - استنتج رتابة  $f$  على  $I$ .

ج - حدد:  $J = f(I)$ .

د - هل  $f$  تقبل دالة عكسية معرفة على مجال يجب تحديده.

2) حدد:  $f^{-1}$ .  $(C_f)$  منحنى الدالة  $f$ .  $(C_{f^{-1}})$  منحنى الدالة  $f^{-1}$ .

**08. مفردات:**

الدالة العكسية  $f^{-1}$  المحصل عليها تسمى كذلك الجذر من الرتبة 2. و نرمز لها ب:  $f^{-1} = \sqrt{\quad}$  أو باختصار:  $f^{-1} = \sqrt{\quad}$

**XIV. دالة الجذر من الرتبة  $n$** **01. نشاط:**

$n \in \mathbb{N}^*$ . لتعتبر الدالة  $f(x) = x^n$  على المجال  $I = [0; +\infty[$

بين أن الدالة  $f$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$  على المجال  $J$  حدده.

**02. مفردات:**

- الدالة العكسية  $f^{-1}$  تسمى الدالة الجذر من الرتبة  $n$ .
- الدالة العكسية  $f^{-1}$  يرمز لها ب:  $f^{-1} = \sqrt[n]{\quad}$ .
- نكتب:  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$  أو أيضا  $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ .
- حالة  $n = 1$ : لدينا  $f^{-1}(x) = \sqrt[1]{x} = x$  (حالة غير مهمة).
- حالة  $n = 2$ : لدينا  $f^{-1}(x) = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$  (الدالة تسمى باختصار الجذر المربع)



▪ حالة:  $n = 3$  لدينا  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$  (الدالة تسمى باختصار الجذر المكعب أو الجذر الثالث).

### 03. تعريف وخاصية:

- $n$  عدد صحيح طبيعي غير منعدم.
- الدالة  $f(x) = x^n$  متصلة و تزايدية قطعا على  $I = [0; +\infty[$ .
  - $f$  تقابل من  $I$  إلى  $J = f(I) = [0; +\infty[$  و دالتها العكسية  $f^{-1}$  تسمى الدالة الجذر من الرتبة  $n$  و نرملها:  $f^{-1} = \sqrt[n]{\phantom{x}}$
  - نكتب:  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$  أو أيضا:  $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$
  - العدد:  $\sqrt[n]{a}$  يسمى الجذر من الرتبة  $n$  للعدد الحقيقي الموجب  $a$ .

### 04. خاصية

- $\sqrt[n]{0} = 0$  ;  $\sqrt[n]{1} = 1$  .  $\sqrt[n]{x^n} = x$  و  $(\sqrt[n]{x})^n = x$  ;  $\forall x \geq 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- منحنى  $(C_{f^{-1}})$  لدالة  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$  هو مماثل  $(C_f)$  منحنى الدالة  $f(x) = x^n$  بالنسبة للمنصف الأول في معلم متعامد منظم (المنصف الأول هو المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x$  :  $(D)$ ).

### 05. نتائج:

- $\forall a \in \mathbb{R}^+ ; \forall b \in \mathbb{R}^+ ; \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^+ ; \forall b \in \mathbb{R}^+ ; \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$

### XV. العمليات على الجذور من الرتبة $n$ .

#### 01. خاصيات:

- $a \geq 0$  و  $b \geq 0$  و  $n$  و  $m$  من  $\mathbb{N}^*$ .
- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
  - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  و  $\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$  ( $b > 0$ ) ;
  - $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$  و  $\sqrt[n \times m]{a^m} = \sqrt[n]{a}$

#### 02. مثال:

بسط:  $\sqrt[5]{3\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}}$   
لدينا:  $\sqrt[5]{3\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}} = \sqrt[3 \times 5]{81} \times \sqrt[15]{3^{11}}$



$$= \sqrt[15]{3^4 \times 3^{11}}$$

$$= \sqrt[15]{3^{15}} = 3$$

$$\sqrt[5]{3^{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}} = 3 \quad \text{خلاصة :}$$

**XVI.** بعض خاصيات الدوال التي هي على شكل:  $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ .

**01.** خاصيات (تقبل)

f دالة عددية موجبة على مجال I. n من  $\mathbb{N}^*$ .

▪ إذا كانت f (x) متصلة على I فإن  $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$  متصلة على I.

▪ إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  و  $l \geq 0$  فإن:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

▪ إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  فإن:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$ .

▪ تبقى الخاصيات صحيحة إذا كان:  $x \rightarrow \pm\infty$ ;  $x \rightarrow x_0^+$ ;  $x \rightarrow x_0^-$

**02.** تمرين تطبيقي :

لنعتبر الدالة f المعرفة ب:  $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$

(1) حدد  $D_f$  مجموعة تعريف f.

(2) أحسب:  $f(0)$ ;  $f(15)$ ;  $f(-1)$

(3) أحسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**XVII.** القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً:

**01.** تعريف :

•  $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*$  (مع  $n \in \mathbb{N}^*$  و  $m \in \mathbb{Z}$ ) و  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ .

الكتابة  $\sqrt[n]{x^m}$  نرمز لها ب:  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$  أو أيضاً ب:  $\sqrt[n]{x^m} = x^r$  أما  $x^r$  يسمى القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r.

$$x^r = x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} \quad \bullet$$

**02.** أمثلة :

(1) مثال 1 : أكتب على شكل  $x^r$  ما يلي:  $(\sqrt[5]{3})^{-32}$  و  $\sqrt[13]{2^{-15}}$  و  $(\sqrt[2]{21})^{-11}$  و  $\sqrt[8]{3^5}$  و  $(\sqrt[9]{7})^{11}$

(2) مثال 2 : أكتب بطريقة أخرى الأعداد التالية:  $\sqrt[3]{8}$ ;  $\sqrt[5]{11}$ ;  $\sqrt{7^3}$ ;  $\sqrt[4]{3^{-5}}$ ;  $\sqrt[4]{3^5}$ .

**03.** ملاحظة:

• تعريف الأس في  $\mathbb{Q}$  هو تمديد لتعريف الأس في  $\mathbb{Z}$ .

• لدينا:  $\sqrt[n]{a^1} = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ;  $\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$  . يمان:  $\sqrt[n]{0} = 0$  يمكن أن نصلح أن:  $0^{\frac{1}{n}} = 0$ .



نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة كما يلي:  $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}$

1. حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .
2. بين أنه يمكن تمديد بالاتصال الدالة  $f$  في  $0$ .
3. أحسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

#### 04. خاصيات القوى الجذرية:

$x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}^{+*}$  و  $r$  و  $r'$  من  $\mathbb{Q}^*$ . لدينا:

- $x^r > 0$
- $x^r = x^{r'} \Leftrightarrow r = r'$
- $x^r \times y^r = (x \times y)^r$  و  $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$  و  $(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$  و  $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$  و  $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

#### 05. مثال: بسط ما يلي.

$$A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right) \quad (1)$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} \quad (2)$$

جواب:

$$A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right) = (2)^{-\frac{5}{3}} \times (2^2)^{-\frac{1}{2}} \times (2^3)^{\frac{2}{3}} = (2)^{-\frac{5}{3}} \times (2^{-1}) \times (2^2) = (2)^{-\frac{5}{3}-1+2} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = \frac{7^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = \frac{7^{\frac{1+2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = 7^{1+\frac{1}{4}} = 7^{\frac{5}{4}}$$