النهايات والإتصال

I) تذكير

1) الأشكال الغير محددة:

$+\infty-\infty$	$\infty\times0$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$

2) العمليات على النهايات الغير منتهية:

$+\infty+a=+\infty$
$-\infty+a=-\infty$
$+\infty+\infty=+\infty \quad (a\in\mathbb{R})$
$-\infty-\infty=-\infty$
$+\infty-\infty$ ش غ محدد

$a\times\infty=\infty \quad (a\neq0)$
$\infty\times\infty=\infty$
$0\times\infty$ ش غ محدد

$\frac{\infty}{a}=\infty \quad \frac{a}{\infty}=0 \quad \frac{a\neq0}{0}=\infty$
$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0}$ ش غ محدد

3) بعض التقنيات لحساب نهاية دالة لا حذرية:

a) $\lim_{\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ ⟵ التعميل.

b) $\lim_{\infty}(f(x)+g(x))=+\infty-\infty$

*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ متقابلين ⟵ المرافق.

*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ غير متقابلين ⟵ التعميل.

c) $\lim_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a-a}{0}=\frac{0}{0}$ $(a\neq0)$ ⟵ المرافق.

d) $\lim_{x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0+0}{0}=\frac{0}{0}$ $(a\neq0)$ ⟵ التفكيك ثم ربما المرافق.

e) ملاحظة: $\sqrt{x^2}=|x|$ ؛ $\begin{cases} x=\sqrt{x^2};x\geq0 \\ x=-\sqrt{x^2};x\leq0\end{cases}$

4) نهايات اعتيادية.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{\tan(ax)}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}=\frac{1}{2}$$

5) الاتصال.

a) لكي نبين أن f متصلة في x_0 نقوم بحساب $\lim_{x_0}f(x)$ إذا وجدنا أن $\lim_{x_0}f(x)=f(x_0)$ فإن f متصلة في x_0.

b) إذا كانت f دالة لا تحتوي على الجزء الصحيح وغير معرفة بأجزاء فإنها متصلة على حيز تعريفها لأنها مركب دوال متصلة في غالب الأحيان.

6) التمديد بالاتصال

لتكن f دالة غير معرفةفي x_0 ، لكي نبين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في x_0 نقوم بحساب $\lim_{x_0}f(x)$ إذا وجدنا $\lim_{x_0}f(x)=l\in\mathbb{R}$ فإن f تقبل تمديدا بالاتصال g في x_0 معرف بما يلي: $\begin{cases} g(x)=f(x) & ,x\neq x_0 \\ g(x_0)=l\end{cases}$

7) النهايات والترتيب.

a) إذا كان $\begin{cases} |f(x)-l|\leq g(x) \text{ بجوار } x_0 \\ \text{و } \lim_{x_0}g(x)=0\end{cases}$ فإن $\lim_{x_0}f(x)=l$

b) إذا كان $\begin{cases} f(x)\leq g(x) \text{ بجوار } x_0 \\ \text{و } \lim_{x_0}f(x)=+\infty\end{cases}$ فإن $\lim_{x_0}g(x)=+\infty$

c) إذا كان $\begin{cases} f(x)\leq g(x) \text{ بجوار } x_0 \\ \text{و } \lim_{x_0}g(x)=-\infty\end{cases}$ فإن $\lim_{x_0}f(x)=-\infty$

d) إذا كانت $\begin{cases} g(x)\leq f(x)\leq h(x) \text{ بجوار } x_0 \\ \lim_{x_0}g(x)=\lim_{x_0}h(x)=l\end{cases}$ فإن $\lim_{x_0}f(x)=l$

II) صورة مجال بدالة متصلة.

1) a) صورة مجال بدالة متصلة هي مجال.
b) صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.

2) a) إذا كانت f متصلة وتزايدية فإن:
*) $f([a,b])=[f(a),f(b)]$ *) $f(]a,b])=]\lim_{a^+}f,f(b)]$.

b) إذا كانت f متصلة وتناقصية فإن:
*) $f([a,b])=[f(b),f(a)]$ *) $f(]a,b[)=]\lim_{b^-}f,\lim_{a^+}f[$.

3) مبرهنة القيم الوسيطية

a) إذا كانت $\begin{cases} f \text{ متصلة على } [a,b] \\ \text{و } \lambda \text{ عدد محصور بين } f(a) \text{ و } f(b)\end{cases}$ فإن $(\exists c\in[a,b]): f(c)=\lambda$

b) إذا كانت $\begin{cases} f \text{ متصلة على } [a,b] \\ \text{و } f(a)\cdot f(b)\langle 0\end{cases}$ فإن $(\exists c\in]a,b[): f(c)=0$
يعني المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا في $]a,b[$

ملاحظة: *) إذا كان $f(a)\cdot f(b)\leq0$ فإن $c\in[a,b]$.
*) إذا كانت f رتيبة قطعا فإن العدد c وحيد.

III) الدالة العكسية

1) إذا كانت:
$\begin{cases} \text{*) } f \text{ متصلة على مجال } I \\ \text{*) } f \text{ رتيبة قطعا على } I \\ \text{*) } f(I)=J\end{cases}$ فإن f تقابل من I نحو J

وبالتالي f تقبل دالة عكسية $f^{-1}:J\to I$ ولدينا:
$(\forall x\in J)(\forall y\in I): f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

2) a) الدالة f^{-1} متصلة على J
b) الدالة f^{-1} رتيبة قطعا على J ولها نفس رتابة الدالة f .
c) في م.م.م المنحنيان C_f و $C_{f^{-1}}$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول $(\Delta): y=x$.

3) اشتقاق الدالة f^{-1} .

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق ورتيبة قطعا على مجال I و $(\forall x\in I): f'(x)\neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J=f(I)$

و $(\forall x\in J):\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

IV) دالة الجذر ن الرتبة n $(n\in\mathbb{N}^*)$

1) تعريف: لكل x من $\mathbb{R}^+$ العدد $\sqrt[n]{x}$ هو العدد y من IR^+ الذي يحقق $y^n=x$.

مثال: *) $\sqrt[4]{16}=2$ لأن $2^4=16$ و $2\geq 0$.

*) $(-2)^4=16$ لكن $\sqrt[4]{16}\neq -2$ لأن $-2\notin\mathbb{R}^+$

2) خاصيات

a) الدالة $\sqrt[n]{\ }$ معرفة على $\mathbb{R}^+$ b) $(\forall x\in\mathbb{R}^+):\sqrt[n]{x}\geq 0$

c) $(\forall x,y\in\mathbb{R}^+):$ *) $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$
*) $\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x<y$.

d) $(\forall x,y\in\mathbb{R}^+):$ *) $x^n=y^n\Leftrightarrow x=y$
*) $x^n\langle y^n\Leftrightarrow x\langle y$.

e) إذا كان n فردي فإن: $(\forall x,y\in\mathbb{R}):$ *) $x^n=y^n\Leftrightarrow x=y$
*) $x^n\langle y^n\Leftrightarrow x\langle y$

f) إذا كان n زوجي فإن: $(\forall x,y\in\mathbb{R}):$ *) $x^n=y^n\Leftrightarrow |x|=|y|$
*) $x^n\langle y^n\Leftrightarrow |x|\langle |y|$

g) *) $(\forall x\geq 0).\sqrt[n]{x^n}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$

*) إذا كان n زوجي $(\forall x\in IR):\sqrt[n]{x^n}=|x|$

h) ليكن n و p من IN^* و a و b من $\mathbb{R}^+$

*) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

*) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$; $\sqrt[np]{a^p}=\sqrt[n]{a}$

*) $(b\rangle 0)\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$

*) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[p]{a}=\sqrt[np]{a^{n+p}}$

i) *) $\left(n\in\mathbb{N}^*,p\in\mathbb{Z}\right)\quad(\forall x\ \rangle\ 0)\ :\ x^{\frac{p}{n}}=\sqrt[n]{x^p}$

*) إذا كان p زوجي: $(\forall x\in\mathbb{R}):\sqrt[n]{x^p}=|x|^{\frac{p}{n}}$.

ملاحظة:

1) إذا كان $xy\ \rangle\ 0$ فإن $\sqrt[n]{x\,y}=\sqrt[n]{|x|}\cdot\sqrt[n]{|y|}$ و $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt[n]{|x|}}{\sqrt[n]{|y|}}$

2) *) $(\forall x\geq 0):\sqrt[3]{x^3}=x$ $\begin{cases} x=\sqrt[3]{x^3}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 & ;\ x\geq 0\\ x=-\sqrt[3]{-x^3}=\left(-\sqrt[3]{-x}\right)^3 & ;\ x\leq 0\end{cases}$.

*) $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ $\qquad a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$

$a-b=\dfrac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$

j) ليكن a و b من IR_+^* و r و r' من $\mathbb{Q}$

$a^r\cdot a^{r'}=a^{r+r'}$ $\qquad \left(a^r\right)^{r'}=a^{rr'}$

$\dfrac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$ $\qquad (ab)^r=a^r\cdot b^r$

$\dfrac{1}{a^r}=a^{-r}$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$