

$$\begin{cases} f(x) = x; x > 0 \\ f(x) = -x; x < 0 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{x}; x > 0 \\ f(x) = -\frac{x^2}{x}; x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f(0) \quad (2)$$

ومنه f متصلة على اليمين عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 = f(0)$$

ومنه f متصلة على اليسار عند $x_0 = 0$

(3) نلاحظ أن f متصلة على اليمين و متصلة على اليسار عند $x_0 = 0$

ومنه نقول f متصلة عند $x_0 = 0$

تمرين 5: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin 2x}{x} - 2, x > 0 \\ f(x) = x^3 - x + 1, x \leq 0 \end{cases}$$

1. أدرس اتصال الدالة f على اليمين و على اليسار في النقطة $x_0 = 0$

2. هل الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 0$ ؟

الجواب 1 : $f(0) = 0^3 - 0 + 1 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{x} - 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\sin 2x}{2x} - 2 = 2 \times 1 - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \neq f(0)$$

ومنه f غير متصلة على اليمين عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - x + 1 = 1 = f(0)$$

ومنه f متصلة على اليسار عند $x_0 = 0$

(2) نلاحظ أن f غير متصلة على اليمين و متصلة على اليسار عند $x_0 = 0$

ومنه f غير متصلة عند $x_0 = 0$

تمرين 6: لتكن f الدالة العددية المعرفة على بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + 2x + 3, x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x+3}{x-1}, x > 2 \end{cases}$$

حدد العدد الحقيقي a علما أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 2$

الجواب : $f(2) = a \times 2^2 + 2 \times 2 + 3 = 4a + 7$

نعلم أن f متصلة في النقطة $x_0 = 2$

ومنه f متصلة على اليمين و متصلة على اليسار عند $x_0 = 2$

تمرين 1: لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}; x \neq 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

الجواب : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$

$$x_0 = 2 : \text{ ومنه } f \text{ دالة متصلة عند } x_0 = 2 : \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4 = f(2)$$

تمرين 2: لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, x \neq 1 \\ f(1) = 4 \end{cases}$$

الجواب : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

$$\text{نعلم أن : } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x \times 1 + 1^2)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x \times 1 + 1^2 = 3 \neq f(1)$$

ومنه f دالة غير متصلة عند $x_0 = 1$ أو متقطعة عند $x_0 = 1$

تمرين 3: لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}, x \neq 2 \\ f(2) = 12 \end{cases}$$

الجواب : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2}$

$$\text{نعلم أن : } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + x \times 2 + 2^2)}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + x \times 2 + 2^2 = 12 = f(1)$$

ومنه f دالة متصلة عند $x_0 = 1$

تمرين 4: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{|x|}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. أكتب صيغة الدالة دون استعمال رمز القيمة المطلقة

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

3. هل f متصلة عند $x_0 = 0$ ؟

الجواب (1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x+3}} = \sqrt{4} = 2 : \text{اذن}$$

تمرين 10: حدد صورة المجال I بالدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

$$1. \quad f(x) = 5x - 1 \quad \text{و} \quad I = [-2; 3]$$

$$2. \quad f(x) = x^2 \quad \text{و} \quad I = [-5; -3]$$

$$3. \quad f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{و} \quad K =]1; +\infty[\quad \text{و} \quad J =]-\infty; 1[\quad \text{و} \quad I = [-3; 1[$$

$$\text{اجوبة: (1)} \quad f(x) = 5x - 1$$

f دالة حدودية اذن متصلة على \mathbb{R} اذن متصلة على $I = [-2; 3]$

$$f'(x) = (5x - 1)' = 5 > 0 \quad \text{ومنه وتزايدية قطعاً على } I$$

$$f(I) = f([-2; 3]) = [f(-2); f(3)] = [-11; 14]$$

$$f(x) = x^2 \quad (2)$$

f دالة حدودية اذن متصلة على \mathbb{R} اذن متصلة على $I = [-5; -3]$

$$f'(x) = (x^2)' = 2x < 0 \quad \text{لأن } x \in [-5; -3] \text{ يعني } -5 \leq x \leq -3$$

ومنه تناقصية قطعاً على I وبالتالي:

$$f(I) = f([-5; -3]) = [f(-3); f(-5)] = [9; 25]$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad (3)$$

f دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

نحدد مجموعة تعريف الدالة f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\}$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{يعني } x = 1 \quad \text{ومنه } D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

ومنه f دالة متصلة على $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

وبالتالي f دالة متصلة على كل المجالات التالية:

$$I = [-3; 1[\quad \text{و} \quad J =]-\infty; 1[\quad \text{و} \quad K =]1; +\infty[$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{(x-1)'}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$$

ومنه تناقصية قطعاً

$$f(I) = f([-3; 1[) = \left[\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x); f(-3) \right]$$

$$\text{ومنه } f(-3) = -\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$f(J) = f(]-\infty; 1[) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right]$$

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{ومنه } f(J) = f(]-\infty; 1[) =]-\infty; 0[$$

$$K =]1; +\infty[$$

$$f(K) = f(]1; +\infty[) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right] =]0; +\infty[$$

تمرين 11: حدد صورة المجال I بالدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

$$1. \quad f(x) = -4x + 1 \quad J = [2; +\infty[\quad I = [1; 2]$$

$$2. \quad f(x) = \frac{x-1}{2x-1} \quad K = \left] \frac{1}{2}; +\infty[\quad J = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\quad \text{و} \quad I = [2; 6[$$

$$\text{اجوبة: (1)} \quad f(x) = -4x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x-1} = 4a + 7 : \text{اذن} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \end{cases} \text{اذن:}$$

تمرين 7: أدرس اتصال الدوال المعرفة كالتالي:

$$g(x) = \frac{6x^5 - 7x}{x-3}, \quad f(x) = x^4 - 6x + 9$$

$$h(x) = \sin x + 2 \cos x$$

الجواب: f دالة حدودية اذن متصلة على \mathbb{R}

g دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

نحدد مجموعة تعريف الدالة g

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x - 3 \neq 0\}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{يعني } x = 3 \quad \text{ومنه } D_g = \mathbb{R} - \{3\}$$

وبالتالي g دالة متصلة على $D_g = \mathbb{R} - \{3\}$

h دالة مكونة من دوال متصلة على \mathbb{R} اذن h متصلة على \mathbb{R}

تمرين 8: أدرس اتصال الدوال المعرفة كالتالي:

$$h(x) = \sqrt{3x+9} \quad (3) \quad g(x) = \frac{3x+1}{2x^2-x-1} \quad (2) \quad f(x) = x^2 - 16x + 1 \quad (1)$$

الجواب: (1) f دالة حدودية اذن متصلة على \mathbb{R}

g دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

نحدد مجموعة تعريف الدالة g

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - x - 1 \neq 0\}$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{نحل المعادلة باستعمال المميز}$$

$$a = 2 \quad \text{و} \quad b = -1 \quad \text{و} \quad c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2 \times 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{ومنه: } D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; 1 \right\}$$

وبالتالي g دالة متصلة على $D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; 1 \right\}$

h دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / 3x + 9 \geq 0\}$$

$$3x + 9 \geq 0 \quad \text{يعني } x \geq -3 \quad \text{ومنه } D_h = [-3; +\infty[$$

وبالتالي h دالة متصلة على $D_h = [-3; +\infty[$

تمرين 9: أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x+3}} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 1}\right) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi x}{\sin 3x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi x}{\sin 3x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\pi \frac{3x}{\sin 3x}\right) : \text{الجواب}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin ax} = 1 : \text{اذن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 : \text{نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\pi \frac{3x}{\sin 3x}\right) = \cos(\pi) = -1 : \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2}{4x^2}\right) = s \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x} = 4 : \text{نعلم أن}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا على الأقل في المجال I

$$\cos x - x = 0 \text{ يعني } \cos x = x \quad (2)$$

نضع $f(x) = \cos x - x$: المعادلة تصبح: $f(x) = 0$

f دالة متصلة على \mathbb{R} إذن متصلة على $I = [0; \pi]$:

$$f(0) \times f(\pi) < 0 : \text{ إذن } f(\pi) = -1 - \pi < 0 \text{ و } f(0) = 1 > 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا على الأقل في المجال I

تمرين 14: بين أن المعادلة التالية تقبل حلا وحيدا في المجال I :

$$I = [-1; 0] \quad x^3 + 2x + 1 = 0$$

الجواب: نضع: $f(x) = x^3 + 2x + 1$:

المعادلة تصبح: $f(x) = 0$

f دالة حدودية إذن متصلة على \mathbb{R} إذن متصلة على $I = [-1; 0]$:

$$f(0) \times f(-1) < 0 : \text{ إذن } f(-1) = -2 < 0 \text{ و } f(0) = 1 > 0$$

ومنه دالة متصلة f' و $f'(x) = (x^3 + 2x + 1)' = 3x^2 + 2 > 0$

تزايدية قطعاً على المجال $I = [-1; 0]$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا في المجال I

تمرين 15: بين أن المعادلات التالية تقبل حلا وحيدا

في المجال I في الحالات التالية:

$$1. \quad I = \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2} \right] \quad x^4 + 2x - 3 = 0$$

$$2. \quad I = [-2; -1] \quad 2x^3 + 3x + 20 = 0$$

الجواب (1): نضع: $f(x) = x^4 + 2x - 3$:

المعادلة تصبح: $f(x) = 0$

f دالة حدودية إذن متصلة على \mathbb{R} إذن متصلة على $I = \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2} \right]$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(\sqrt{2}) < 0 : \text{ إذن } f(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} > 0 \text{ و } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{31}{16} < 0$$

$x \in \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2} \right]$: لأن $f'(x) = (x^4 + 2x - 3)' = 4x^3 + 2 > 0$

ومنه f دالة متصلة تزايدية قطعاً على المجال $I = \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2} \right]$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا في المجال I

(2) نضع: $f(x) = 2x^3 + 3x + 20$:

المعادلة تصبح: $f(x) = 0$

f دالة حدودية إذن متصلة على \mathbb{R} إذن متصلة على $I = [-2; -1]$:

$$f(-2) \times f(-1) < 0 : \text{ إذن } f(-2) = -2 < 0 \text{ و } f(-1) = 15 > 0$$

$f'(x) = (2x^3 + 3x + 20)' = 6x^2 + 3 > 0$

ومنه f دالة متصلة تزايدية قطعاً على المجال $I = [-2; -1]$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا في المجال I

تمرين 16: أدرس اتصال الدوال المعرفة على \mathbb{R} كالتالي:

$$h(x) = x^3 - x + 1 + \sin x \quad (1)$$

$$h(x) = \sin(x^3 - x + 1) \quad (2)$$

f دالة حدودية إذن متصلة على \mathbb{R} إذن متصلة على $I = [1; 2]$:

ومنه f' تناقصية قطعاً على I

$$f(I) = f([1; 2]) = [f(2); f(1)] = [-7; -3]$$

$$f(J) = f([2; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(2) \right]$$

$$f(J) = f([2; +\infty[) =]-\infty; -7]: \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x + 1 = -\infty$$

(2) دالة جذرية إذن متصلة على مجموعة تعريفها $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$

نحدد مجموعة تعريف الدالة f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 1 \neq 0\} \text{ يعني } 2x - 1 = 0 \text{ و } x = \frac{1}{2} \text{ ومنه } :$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ ومنه } f \text{ دالة متصلة على } D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

وبالتالي f دالة متصلة على كل المجالات التالية:

$$I = [2, 6[\quad \text{و} \quad J =]-\infty; \frac{1}{2}[\quad \text{و} \quad K = \left] \frac{1}{2}; +\infty[$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{2x-1} \right)' = -\frac{(x-1) \times (2x-1) - (x-1) \times (2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)^2} > 0$$

ومنه تزايدية قطعاً $f(I) = f([2, 6[) = [f(2); f(6)[= \left[\frac{1}{3}; \frac{5}{11}[$

$$f(J) = f\left(] -\infty; \frac{1}{2}[\right) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) \right[$$

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ومنه } f(J) = \left] \frac{1}{2}; +\infty[$$

$$f(K) = f\left(\left] \frac{1}{2}; +\infty[\right) = \left] \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty; \frac{1}{2}[\quad K = \left] \frac{1}{2}; +\infty[$$

تمرين 12: بين أن المعادلة التالية تقبل حلا على الأقل في المجال I :

$$I = [0; 1] \quad x^4 + x^2 + 4x - 1 = 0$$

الجواب: نضع: $f(x) = x^4 + x^2 + 4x - 1$:

المعادلة تصبح: $f(x) = 0$

f دالة حدودية إذن متصلة على \mathbb{R} إذن متصلة على $I = [0; 1]$:

$$f(0) \times f(1) < 0 : \text{ إذن } f(1) = 5 \text{ و } f(0) = -1$$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا

على الأقل في المجال $I = [0; 1]$

تمرين 13: بين أن المعادلات التالية تقبل حلا على الأقل في المجال

I في الحالات التالية:

$$1. \quad I = \left[-\frac{\pi}{6}; 0 \right] \quad \sin x + \frac{1}{3} = 0$$

$$2. \quad I = [0; \pi] \quad \cos x = x$$

الجواب (1): نضع: $f(x) = \sin x + \frac{1}{3}$:

المعادلة تصبح: $f(x) = 0$

f دالة متصلة على \mathbb{R} إذن متصلة على $I = \left[-\frac{\pi}{6}; 0 \right]$:

$$f(0) \times f\left(-\frac{\pi}{6}\right) < 0 : \text{ إذن } f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} < 0 \text{ و } f(0) = \frac{1}{3} > 0$$

نحدد مجموعة تعريف الدالة f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0\}$$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$: ومنه $x = -1$ يعني $x+1 = 0$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية:} \quad f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$$

$$f'(x) = \left(\frac{3x+2}{x+1}\right)' = \frac{(3x+2)'(x+1) - (3x+2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{3(x+1) - 1 \times (3x+2)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

نحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1}$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x+1} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} x+1 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1} 3x+2 = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty$ و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow -1^+} x+1 = 0^+$

و $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = +\infty$ و بالتالي: $\lim_{x \rightarrow -1^-} x+1 = 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	3	$+\infty$	3

g هي قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty; -1[$

ومنه g دالة متصلة على المجال $I =]-\infty; -1[$

g تزايدية قطعاً على المجال $I =]-\infty; -1[$

ومنه g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على

مجال: $J = f(I) = f(]-\infty; -1[) =]3; +\infty[$

$$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases} \quad (3)$$

$$3y+2 = x(y+1) \quad \text{يعني} \quad \frac{3y+2}{y+1} = x \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} g(y) = x \\ y \in]-\infty; -1[\end{cases}$$

$$\text{يعني} \quad 3y - xy = x - 2 \quad \text{يعني} \quad y(3-x) = x - 2$$

$$\text{يعني} \quad y = \frac{x-2}{3-x} \quad \text{ومنه} \quad g^{-1}(x) = \frac{x-2}{3-x}$$

$$\text{ومنه} \quad g^{-1}:]3; +\infty[\rightarrow]-\infty; -1[$$

$$\dots\dots x \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-2}{3-x}$$

تمرين 19: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \quad \text{بما يلي:}$$

1. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال

J يجب تحديده

2. حدد الدالة العكسية f^{-1} للدالة f لكل x من J

أجوبة 1: h هي مجموع الدالتين متصلتين على \mathbb{R} إذن هي دالة

متصلة على \mathbb{R}

$h(2)$ هي مركب الدالتين متصلتين على \mathbb{R} إذن هي دالة متصلة على \mathbb{R}

$$h = g \circ f \quad g(x) = \sin x \quad \text{و} \quad f(x) = x^3 - x + 1$$

تمرين 17: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$

1. أدرس تغيرات الدالة f وحدد جدول تغيرات

2. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I =]-2; +\infty[$

تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده

3. حدد الدالة العكسية g^{-1} للدالة f لكل x من J

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2} \quad \text{(أجوبة 1)}$$

نحدد مجموعة تعريف الدالة f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$$

$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$: ومنه $x = -2$ يعني $x+2 = 0$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية:} \quad f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)' = \frac{(x-3)'(x+2) - (x-3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1(x+2) - 1 \times (x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	1	$+\infty$	1

g هي قصور الدالة f على المجال $I =]-2; +\infty[$

ومنه g دالة متصلة على المجال $I =]-2; +\infty[$

g تزايدية قطعاً على المجال $I =]-2; +\infty[$

ومنه g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على

مجال: $J = f(I) = f(]-2; +\infty[) =]-\infty; 1[$

$$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases} \quad (3)$$

$$y-3 = x(y+2) \quad \text{يعني} \quad \frac{y-3}{y+2} = x \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} g(y) = x \\ y \in]-2; +\infty[\end{cases}$$

$$\text{يعني} \quad y - xy = 2x + 3 \quad \text{يعني} \quad y(1-x) = 2x + 3$$

$$\text{يعني} \quad y = \frac{2x+3}{1-x} \quad \text{ومنه} \quad g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$$

$$\text{ومنه} \quad g^{-1}:]-\infty; 1[\rightarrow]-2; +\infty[$$

$$\dots\dots x \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$$

تمرين 18: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$

1. أدرس الدالة f وحدد جدول تغيرات

2. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I =]-\infty; -1[$

تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده

3. حدد الدالة العكسية g^{-1} للدالة f لكل x من J

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+1} \quad \text{(أجوبة 1)}$$

3. أرسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f و المنحني $(C_{f^{-1}})$

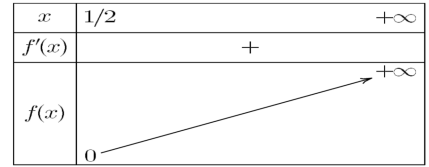
الممثل للدالة f^{-1} في نفس المعلم المتعامد المنظم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{o})$

أجوبة (1): $D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[= I$

f دالة متصلة على المجال $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$f'(x) = (\sqrt{2x-1})' = \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$

f تزايدية قطعاً على المجال $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$



ومنه f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة

على مجال: $J = f(I) = f\left(\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\right) = [0; +\infty[$

$f(y) = x \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$ (2)

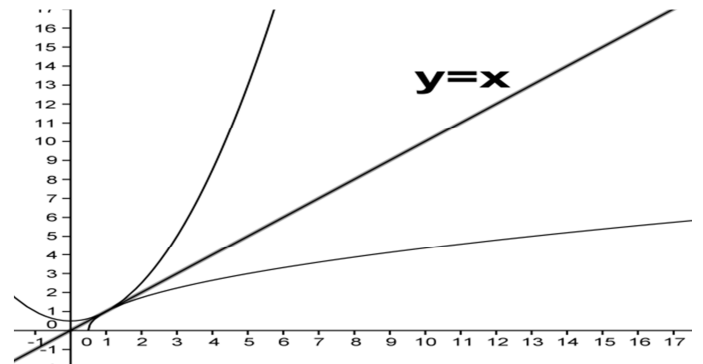
$f(y) = x$ يعني $\sqrt{2y-1} = x$ يعني $2y-1 = x^2$ يعني $y \in [0; +\infty[$

يعني $2y = x^2 + 1$ يعني $y = \frac{x^2 + 1}{2}$ ومنه $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$

ومنه: $f^{-1}: [0; +\infty[\rightarrow \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$

(3) منحني الدالة f^{-1} هو مماثل منحني الدالة f بالنسبة للمستقيم $y = x$ في معلم متعامد ممنظم



تمرين 20: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

ولتكن g قصور الدالة f على المجال $I = [0; +\infty[$

- حدد مجموعة تعريف الدالة f
- بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
- حدد الدالة العكسية g^{-1} للدالة f لكل x من J

الجواب:

(1) نحدد مجموعة تعريف الدالة f

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1+x^2 \neq 0\}$

$D_f = \mathbb{R}$: ومنه $1+x^2 = 0$ يعني $x^2 = -1$ ليس لها حل في \mathbb{R}

(2) دالة جذرية إذن متصلة على مجموعة تعريفها

إذن g متصلة على: $I = [0; +\infty[$

$g'(x) = \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{(x^2)' \times (1+x^2) - (x^2) \times (1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$

$\forall x \in [0; +\infty[\quad g'(x) = \frac{2x \times (1+x^2) - (x^2) \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \geq 0$

g تزايدية قطعاً على المجال $I = [0; +\infty[$

وبالتالي g تقبل دالة عكسية g^{-1}

معرفة على مجال: $J = f(I) = g([0; +\infty[) = [0; 1[$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in g(I) \end{cases}$ (3)

$f(y) = x$ يعني $\frac{y^2}{1+y^2} = x$ يعني $x(y^2+1) = y^2$

يعني $xy^2 - y^2 = -x$ يعني $y^2(x-1) = -x$ يعني $y^2 = \frac{-x}{x-1} = \frac{x}{1-x}$

يعني $y = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ أو $y = -\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ وبما أننا نعلم أن: $y \in [0; 1[$

إذن: y موجب ومنه: $y = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ ومنه: $g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

ومنه: $g^{-1}: [0; 1[\rightarrow [0; +\infty[$

$x \rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

تمرين 21: (1) أحسب وبسط التعابير التالية:

$(\sqrt[3]{2})^3$ و $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$

$B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{256}}$ $A = \sqrt[3]{32} - (\sqrt[3]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \frac{\sqrt[3]{96}}{\sqrt[3]{3}}$

$D = \sqrt{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}}$ $C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$

(2) قارن: $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[2]{3}$

(3) حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

(أ) $\sqrt[3]{3x-4} = 2$ (ب) $(\sqrt[3]{x})^2 - 5\sqrt[3]{x} + 6 = 0$

(4) أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24}$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

أجوبة:

$(\sqrt[3]{2})^3 = 2$ و $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[2]{2^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2}$

$A = \sqrt[3]{32} - (\sqrt[3]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \frac{\sqrt[3]{96}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2^5} - 2 + \sqrt[3]{2^3} + \frac{\sqrt[3]{2^3 \times 3}}{\sqrt[3]{3}} = 2 - 2 + 2 + \sqrt[3]{2} = 2 + \sqrt[3]{2}$

$A = 2 - 2 + 2 + 2 = 4$

$B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{256}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^4} \times \sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{256}}$

(2) قارن: $\sqrt[4]{3}$ و $\sqrt[5]{4}$
 (3) قارن: $\sqrt[3]{28}$ و $\sqrt{13}$ وقارن: $\sqrt[5]{23}$ و $\sqrt[5]{151}$

أجوبة:
 (1)

$$= \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[3]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{252} \times \sqrt{18}} = \frac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt[3]{2^{10} \times 10^5}}{\sqrt[4]{2^6} \times \sqrt[3]{2^8} \times \sqrt{2 \times 3^2}} = \frac{2^{\frac{10}{3}} \times 2 \times 10}{2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{8}{3}} \times 3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = 20$$

(أ) مقارنة: $\sqrt[4]{3}$ و $\sqrt[5]{4}$

نطبق القاعدة: $\sqrt[n \times m]{x^m} = \sqrt[n]{x}$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[4 \times 5]{3^5} = \sqrt[20]{243} \quad \text{و} \quad \sqrt[5]{4} = \sqrt[4 \times 5]{4^4} = \sqrt[20]{4096}$$

لدينا: $\sqrt[20]{406} > \sqrt[20]{243}$ لأن: $406 > 243$ ومنه: $\sqrt[5]{4} > \sqrt[4]{3}$

(ب) مقارنة: $\sqrt[3]{28}$ و $\sqrt{13}$

نطبق القاعدة: $\sqrt[n \times m]{x^m} = \sqrt[n]{x}$

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[6]{28^2} = \sqrt[6]{784} \quad \text{و} \quad \sqrt{13} = \sqrt[2]{13} = \sqrt[2 \times 3]{13^3} = \sqrt[6]{2197}$$

لدينا: $\sqrt[6]{2197} > \sqrt[6]{784}$ لأن: $2197 > 784$

ومنه: $\sqrt{13} > \sqrt[3]{28}$

(ج) مقارنة: $\sqrt[5]{23}$ و $\sqrt[5]{151}$

$$\sqrt[5]{23} > \sqrt[5]{151} \quad \text{منه} \quad \sqrt[5]{23} = \sqrt[5]{23^3} = \sqrt[5]{12167}$$

تمرين 23: أكتب على شكل جذر من الرتبة n

$$2^{\frac{2}{7}} \quad \text{و} \quad 2^{\frac{3}{4}}$$

$$2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8} \quad \text{أجوبة:}$$

$$2^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{2^{-2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{4}}$$

تمرين 24: (1) أحسب وبسط التعابير التالية:

$$B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt{9}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt{3}}} \quad \text{و} \quad A = \frac{\sqrt[5]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[3]{3}}$$

(2) حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0 \quad \text{(ب) } \sqrt[3]{x-1} = 3$$

(3) أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5+x^2+1}$$

أجوبة: (1)

$$A = \frac{\sqrt[5]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[3]{3}} = \frac{(3^5)^{\frac{1}{5}} \times (3^2)^{\frac{1}{3}} \times (3^{\frac{1}{5}})^3}{3^{\frac{1}{3}}}$$

$$A = \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$$

$$A = \frac{3^{\frac{8}{15}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{8}{15} - \frac{5}{15}} = 3^{\frac{3}{15}} = 3^{\frac{1}{5}} = (\sqrt[5]{3})^{\frac{1}{5}}$$

$$B = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{2}{6}} \times 2^{\frac{1}{15}}}{\sqrt[5]{2^8}} = \frac{2^{\frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}}}{2^{\frac{8}{5}}} = \frac{2^{\frac{23}{15}}}{2^{\frac{8}{5}}} = 2^{\frac{23}{15} - \frac{8}{5}} = 2^{\frac{15}{15}} = 2$$

$$C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{(3^3)^{\frac{2}{9}} \times (3^4)^{\frac{1}{4}} \times (3^2)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3^1 \times 3^5}{3^{\frac{17}{3}}}$$

$$C = \frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}} = 3^{\frac{20}{3} - \frac{17}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$$

$$D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 2^7 \times 10^6}{(3^3)^2}} = \sqrt[6]{\frac{10^6}{3^6} \times 2^{12}} = \sqrt[6]{\frac{10^6}{3^6}} \times \sqrt[6]{(2^2)^6}$$

$$D = \sqrt[6]{\left(\frac{10}{3}\right)^6} \times \sqrt[6]{(2^2)^6} = \frac{10}{3} \times 2^2 = \frac{40}{3}$$

(2) مقارنة: $\sqrt[3]{3}$ و $\sqrt[5]{2}$ نطبق القاعدة: $\sqrt[n \times m]{x^m} = \sqrt[n]{x}$

$$\sqrt[5]{2} = \sqrt[7 \times 5]{2^7} = \sqrt[35]{128} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{3} = \sqrt[7 \times 3]{3^5} = \sqrt[21]{243}$$

لدينا: $\sqrt[35]{243} > \sqrt[35]{128}$ لأن: $243 > 128$ ومنه: $\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{2}$

$$(3) \quad (\sqrt[5]{3x-4})^5 = (2)^5 \quad \text{يعني} \quad \sqrt[5]{3x-4} = 2$$

يعني $3x-4 = 32$ يعني $3x = 36$ يعني $x = 12$ ومنه: $S = \{12\}$

$$(ب) \quad \sqrt[5]{x} = X \quad \text{نضع} \quad (\sqrt[5]{x})^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0$$

المعادلة تصبح: $X^2 - 5X + 6 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a = 1$ و $b = -5$ و $c = 6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{5+1}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

ومنه: $\sqrt[5]{x} = 2$ أو $\sqrt[5]{x} = 3$ يعني $(\sqrt[5]{x})^5 = (2)^5$ أو $(\sqrt[5]{x})^5 = (3)^5$

$$S = \{32; 243\} \quad \text{يعني} \quad x = 32 \quad \text{أو} \quad x = 243 \quad \text{ومنه:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24} = \sqrt[5]{2^3 + 24} = \sqrt[5]{8 + 24} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$$

نحتفظ بأكبر درجة فقط

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)''$$

نعلم أن: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1}-1)((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (1)^3}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{تمرين 22: (1) أحسب وبسط: } A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[3]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{252} \times \sqrt{18}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)}{(x - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)} \text{ : اذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{((\sqrt[3]{x})^3 - 1^3)}{(x - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2)} = \frac{1}{1 + 1 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x ((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{(\sqrt[3]{x+1} - 1)((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x ((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{(\sqrt[3]{x+1} - 1)((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x ((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} ((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2) = 1 \times 3 = 3$$

تمرين 25: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية :

$x^7 = -128$ (2) $x^5 = 32$ (1)

$x^6 = -8$ (4) $x^4 = 3$ (3)

الأجوبة : (1) $x^5 = 32$ ان: $x > 0$

ومنه : $x = \sqrt[5]{32}$ يعني $x = \sqrt[5]{2^5}$ يعني $x = 2$ ومنه : $S = \{2\}$

$x < 0$: ان: $x^7 = -128$ (2)

ومنه : $x = -\sqrt[7]{128}$ يعني $x = -\sqrt[7]{2^7}$ يعني $x = -2$

ومنه : $S = \{-2\}$

$x^4 = 3$ (3) يعني $x = \sqrt[4]{3}$ أو $x = -\sqrt[4]{3}$

ومنه : $S = \{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\}$

$-8 < 0$ $x^6 = -8$ (4)

و $x^6 \geq 0$ ومنه : $S = \Phi$

$$B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt{9}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt{3}}} = \frac{(3^2)^{\frac{1}{4}} \times (3^4)^{\frac{1}{6}}}{(3^4)^{\frac{1}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}} \times 3}{(3^4)^{\frac{1}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}}$$

$$B = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{1}{8}}} = 3^{\frac{3}{2} - \frac{4}{5} - \frac{1}{8}} = 3^{\frac{30}{40} - \frac{32}{40} - \frac{5}{40}} = 3^{\frac{11}{40} - \frac{37}{40}} = 3^{-\frac{26}{40}} = 3^{-\frac{13}{20}}$$

$$B = 3^{\frac{23}{40}} = \sqrt[40]{3^{23}}$$

$x - 1 = 27$ يعني $(\sqrt[3]{x-1})^3 = 3^3$ يعني $\sqrt[3]{x-1} = 3$ (أ) (2)

يعني $x = 28$ ومنه : $S = \{28\}$

(ب) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$ يعني $x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$

نضع $X^2 - 7X - 8 = 0$: المعادلة تصبح $x^{\frac{1}{3}} = X$
نحل المعادلة باستعمال المميز $a = 1$ و $b = -7$ و $c = -8$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 49 + 32 = 81 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{7 - 9}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ و } x_1 = \frac{7 + 9}{2 \times 1} = \frac{16}{2} = 8$$

ومنه : $x^{\frac{1}{3}} = -1$ أو $x^{\frac{1}{3}} = 8$

المعادلة: $x^{\frac{1}{3}} = -1$ ليس لها حل في \mathbb{R}

اذن نأخذ فقط $x^{\frac{1}{3}} = 8$ تعني $(8)^3 = (x^{\frac{1}{3}})^3$ تعني $x = 512$

ومنه : $S = \{512\}$

(3) أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5} = +\infty$$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$: نعلم أن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant
régulièrement aux calculs et
exercices que l'on devient un

