

تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم التجريبية ، الإمتحان الوطني دورة يونيو 2009
تقديم: ذ. الوظيفي

التمرين الأول :

1) لدينا : $\overrightarrow{OC}(2;-1;0)$

و $\overrightarrow{OD}(0;1;-1)$

إذن : $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

ومنه : $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

. نبين أن : $x + 2y + 2z = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (OCD) :

نعلم أن : $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$ متجهة منظمية على المستوى (OCD) .

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (OCD) تكتب على شكل : $x + 2y + 2z + d = 0$.

وحيث أن O نقطة من المستوى (OCD) فإن : $0 + 2 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0$ أي أن : $d = 0$.

وبالتالي : $x + 2y + 2z = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (OCD) .

2) لدينا : $M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

إذن (S) هي الفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$.

وبالتالي : مركز الفلكة هو منتصف القطعة $[AB]$ أي $\Omega\left(\frac{-2+6}{2}; \frac{2+6}{2}; \frac{8+0}{2}\right)$ أي $\Omega(2;4;4)$

وشعاع الفلكة هو $R = \frac{\sqrt{(6+2)^2 + (6-2)^2 + (-8)^2}}{2} = 6$

3) أ. مسافة Ω عن المستوى (OCD) هي : $d(\Omega; (OCD)) = \frac{|2 + 2 \times 4 + 2 \times 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{18}{3} = 6$

ب. بما أن $d(\Omega; (OCD)) = 6$ وشعاع الفلكة يابوس العدد 6

فإن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S) .

ج. نتحقق أن $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 0$:

لدينا : $\overrightarrow{OA}(-2,2,8)$

و $\overrightarrow{OB}(6;6;0)$

إذن : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (-2) \times 6 + 2 \times 6 + 8 \times 0 = 0$

استنتاج : لدينا : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 0$ إذن : $O \in (S)$

ولدينا : $O \in (OCD)$.

إذن : O نقطة مشتركة بين (S) و (OCD) .

وحيث أن للفلكة (S) و المستوى (OCD) نقطة مشتركة وحيدة لأن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S) .

ومنه O هي نقطة تماس (OCD) و (S) .

التمرين الثاني :

(1) نكتب على الشكل المثلثي كلا من العددين a و b :

$$|a| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \text{ معيار } a \text{ هو}$$

$$a = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ لدينا :}$$

معيار العدد B هو : 1

$$b = 1 \times \left(-\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 1 \times \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) \text{ لدينا :}$$

$$b = 1 \times \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) \text{ ومنه : } a = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

2. أ. نبين أن $z' = bz$

لدينا :

$$\begin{aligned} M' = R(M) &\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{5\pi}{6}} (z - z_0) + z_0 \\ &\Leftrightarrow z' = \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) z \\ &\Leftrightarrow z' = bz \end{aligned}$$

$$\text{ومنه } z' = bz$$

لدينا :

$$bz_A = \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) (2 - 2i) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (2 - 2i) = -\sqrt{3} + i\sqrt{3} + i + 1 = z_C$$

ومنه : النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R .

(3) نبين أن : $\arg c \equiv \arg b + \arg a \pmod{2\pi}$ لدينا النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R . إذن : $c = ba$

$$\text{وبالتالي : } \arg c \equiv \arg b + \arg a \pmod{2\pi}$$

نحدد عمدة للعدد c :

$$\text{لدينا : } \arg a \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ و } \arg b \equiv \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$$

$$\text{إذن : } \arg c \equiv \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

$$\text{وبالتالي : } \arg c \equiv \frac{7\pi}{12} \pmod{2\pi}$$

3B ; 4N ; 5R

1

ليكن Ω كون الإمكانيات .

السحب يتم تانيا . إذن كل سحبة عبارة عن تآليفة لثلاثة عناصر من بين 12

$$\text{card}\Omega = C_{12}^3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$
 وبالتالي :

بما أن الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس فإن الإحتمال منتظم . (لدينا فرضية تساوي الإحتمال) .

احتمال الحدث A : الحصول على 3 كرات من نفس اللون يعني سحب 3كرات بيضاء أو 3كرات سوداء أو 3 كرات

$$\text{card}(A) = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 15$$
 وبالتالي

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$
 ومنه : احتمال الحدث A هو :

احتمال الحدث B : الحصول على 3 كرات مختلفة اللون مثلى مثلى يعني سحب كرة من كل لون .

$$\text{card}(B) = C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 60$$
 وبالتالي

$$p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$
 ومنه : احتمال الحدث A هو :

$$p(B) = \frac{3}{11} \text{ و } p(A) = \frac{3}{44}$$
 ومنه :

2 أ. عندما نسحب 3 كرات تانيا من الكيس فإن عدد الألوان التي يمكن سحبها هو : 1 أو 2 أو 3 .

ومنه القيم الممكنة التي يمكن للمتغير العشوائي X أن يأخذها هي : 1 و 2 و 3 .

2.ب.

. حساب احتمال الحدث $(X=1)$:الحدث $(X=1)$ هو الحصول على لون واحد أي أن للكرات الثلاث المسحوبة نفس اللون .الحدث $(X=1)$ هو الحدث A (الوارد في السؤال 1)

$$\text{إذن : } p(X=1) = p(A) = \frac{3}{44}$$

. حساب احتمال الحدث $(X=3)$:الحدث $(X=3)$ هو الحصول على 3 ألوان أي سحب كرة من كل لون

$$\text{إذن الحدث } (X=3) \text{ هو الحدث B (الوارد في السؤال 1) . وبالتالي : } p(X=3) = p(B) = \frac{3}{11}$$

. حساب احتمال الحدث $(X=2)$:الحدث $(X=2)$ هو الحصول على لونين مختلفين بالضبط .

$$\text{ومنه : } \text{card}(X=2) = \text{card}\Omega - (\text{card}A + \text{card}B) = 145$$
 وبالتالي .. $p(X=2) = \frac{\text{card}(X=2)}{\text{card}\Omega} = \frac{145}{220} = \frac{1}{5}$

ومنه قانون احتمال X هو :

x_i	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{44}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{11}$

$$\text{الأمّل الرياضي للمتغير العشوائي X هو : } E(X) = \left(1 \times \frac{3}{44}\right) + \left(2 \times \frac{1}{5}\right) + \left(3 \times \frac{3}{11}\right) =$$



التمرين الرابع :

1. أ. توحيد المقام ..

ب. نبين أن : $I = 1 - 3\ln 2$

لدينا :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3} dx = \int_{-2}^{-1} 1 - \frac{3}{x+3} dx = \\
 &= \int_{-2}^{-1} 1 dx - \int_{-2}^{-1} \frac{3}{x+3} dx = [x]_{-2}^{-1} - 3 \int_{-2}^{-1} \frac{(x+3)'}{x+3} dx = 1 - 3[\ln|x+3|]_{-2}^{-1} \\
 &= 1 - 3(\ln 2 - \ln 1) = 1 - 3(\ln 2 - 0)
 \end{aligned}$$

ومنه $I = 1 - 3\ln 2$ نبين أن : $J = -I$

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{2}{2x+6} = \frac{1}{x+3} \\ v(x) = x \end{cases} \quad \text{نضع : } \begin{cases} u(x) = \ln(2x+6) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad \text{إذن : }$$

وبالتالي : $J = [x \ln(2x+6)]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3} dx = -\ln 4 + 2\ln 2 - \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3} dx = -I$ لأن $\ln 4 = 2\ln 2$

ومنه : $J = -I$ مسألة : $f(x) = 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$ 1. نتحقق أن : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$ لكل x من \mathbb{R} ليكن x من \mathbb{R} ،

$$\text{لدينا } e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left[(\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 \right] + 1 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$$

ومنه $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$ لكل x من \mathbb{R} .تكون الدالة f معرفة إذا كان : $x \in \mathbb{R}$ و $e^x \geq 0$ و $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$ وحيث أن $(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0$ و $e^x > 0$ لكل x من \mathbb{R} فإن : $e^x \geq 0$ و $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$ لكل x من \mathbb{R} ومنه الدالة f معرفة على \mathbb{R} .ليكن x من \mathbb{R} ،لدينا : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$ إذن : $\frac{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}{e^x} > 0$ وبالتالي : $1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$ لكل x من \mathbb{R} .2) لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 = +\infty$ وبما أن : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln \left((\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 \right) = +\infty$ 

نبين أن : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ln 4$

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = 0$. إذن : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \ln 2 = \ln 4$

هندسيا : المستقيم الذي معادلته $y = \ln 4$ مقارب مواز لمحور الأفاصيل جوار $(-\infty)$.

$$f'(x) = 2 \times \frac{2 \times (\sqrt{e^x - 1})(\sqrt{e^x - 1})}{(\sqrt{e^x - 1})^2 + 1} = 2 \times \frac{2 \times \frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}(\sqrt{e^x - 1})}{(\sqrt{e^x - 1})^2 + 1} = \frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x - 1})}{(\sqrt{e^x - 1})^2 + 1} \quad \text{لـ } x \text{ من } \mathbb{R}$$

لدينا : $f'(0) = \frac{2\sqrt{e^0}(\sqrt{e^0 - 1})}{(\sqrt{e^0 - 1})^2 + 1} = \frac{0}{2} = 0$ لأن $e^0 = 1$.

ب. ندرس إشارة $\sqrt{e^x - 1}$:

$$\sqrt{e^x - 1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x} > 1$$

$$\Leftrightarrow e^x > 1 \quad \text{و}$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

$$\sqrt{e^x - 1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

ومنه : جدول إشارة $\sqrt{e^x - 1}$ هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sqrt{e^x - 1}$	-	0	+

ج. استنتاج :

ليكن x من \mathbb{R} .

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x - 1})}{(\sqrt{e^x - 1})^2 + 1} \quad \text{لدينا :}$$

وبما أن : $(\sqrt{e^x - 1})^2 + 1 > 0$ و $2\sqrt{e^x} > 0$ فإن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{e^x - 1}$.
ومنه : f تزايدية على $[0; +\infty[$ وتناقصية على $]-\infty; 0]$.

4. أ. ليكن x من \mathbb{R} ،

$$f(x) = 2 \ln \left(e^x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right) \right) = 2 \left[\ln e^x + \ln \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right) \right] = 2x + 2 \ln \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right) \quad \text{لدينا :}$$

4. ب. لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0$.

ومنه المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $(+\infty)$.

5. أ. ليكن x من \mathbb{R} ،

$$(\sqrt{e^x - 1})(\sqrt{e^x - 2}) = (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} + 2 = e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 \quad \text{لدينا :}$$

ومنه : $(\sqrt{e^x - 1})(\sqrt{e^x - 2}) = e^x - 3\sqrt{e^x} + 2$ لكل x من \mathbb{R} .

(5) ب. لدينا :

$$\sqrt{e^x} - 2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x} > 2$$

$$\Leftrightarrow e^x > 4$$

$$\Leftrightarrow x > \ln 4$$

و

$$\sqrt{e^x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x} = 2$$

$$\Leftrightarrow e^x = 4$$

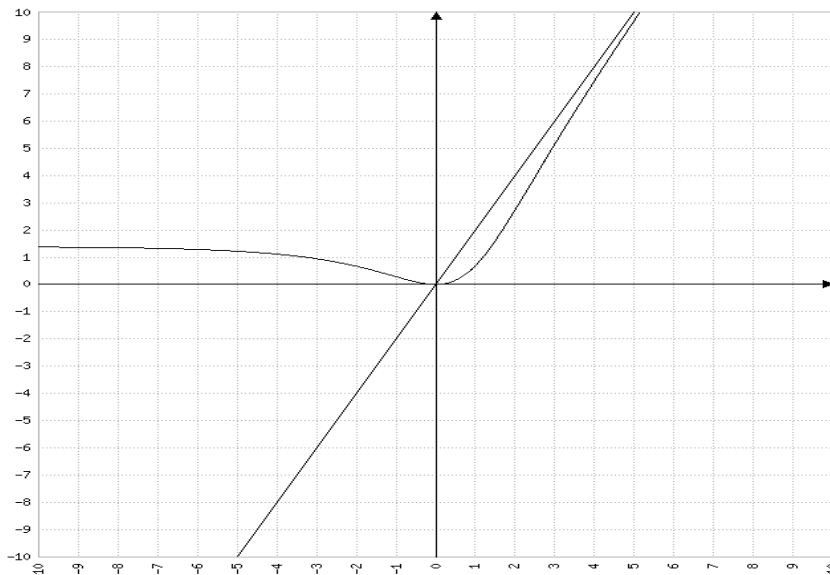
$$\Leftrightarrow x = \ln 4$$

ومنه : جدول إشارة $\sqrt{e^x} - 1$ هو :

x	$-\infty$	$\ln 4$	$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 2$	-	0	+

جدول إشارة $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$ هو :

x	$-\infty$	0	$\ln 4$	$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 1$	-	○	+	+
$\sqrt{e^x} - 2$	-	○	-	+
$(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$	+	○	-	+

(5) ج. ليكن x من $[0; \ln 4]$ ،لدينا : $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) \leq 0$ إذن : $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 \leq 0$ وبالتالي : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$ لكل x من $[0; \ln 4]$.5. د. ليكن x من $[0; \ln 4]$ ،لدينا : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$ إذن : $\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq \ln \sqrt{e^x}$ أي : $\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq \frac{1}{2} \ln(e^x)$ وبالتالي : $\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq \frac{1}{2} \ln(e^x)$ ومنه : $2 \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq \ln(e^x)$ وبالتالي $f(x) \leq x$ لكل x من $[0; \ln 4]$.6. بإنشاء منحنى f :

(II) نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من N .

1. نبين أن : $0 \leq u_n \leq \ln 4$ لكل n من N .

من أجل $n = 0$ لدينا : $1 \leq u_0 \leq \ln 4$ لأن $u_0 = 1$.

ليكن n من N .

نفترض أن $0 \leq u_n \leq \ln 4$ و نبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq \ln 4$.

لدينا : $0 \leq u_n \leq \ln 4$

إذن : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(\ln 4)$ لأن f تزايدية قطعا على المجال $[0; \ln 4]$.

وبالتالي : $0 \leq u_{n+1} \leq \ln 4$

ومنه حسب مبدأ التراجع : $0 \leq u_n \leq \ln 4$ لكل n من N .

2. نبين أن المتتالية (u_n) تناقصية :

ليكن n من N .

لدينا : $f(x) \leq x$ لكل x من $[0; \ln 4]$ و $0 \leq u_n \leq \ln 4$

إذن : $f(u_n) \leq u_n$ أي : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

إذن : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ لكل n من N .

ومنه : المتتالية (u_n) تناقصية

3. نبين أن (u_n) متقاربة ونحدد نهايتها :

لدينا : (u_n) تناقصية ومصغرة بالعدد 0 .

إذن : (u_n) متقاربة. لتكن l نهايتها.

لدينا :

الدالة f متصلة على المجال $I = [0; \ln 4]$ و $I \subset I$ و $u_0 \in I$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من N و (u_n) متقاربة

إذن : l حل للمعادلة $f(x) = x$ في $I = [0; \ln 4]$

ليكن x من $I = [0; \ln 4]$

لدينا :

$$f(x) = x \Leftrightarrow 2 \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = x$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \sqrt{e^x}$$

$$\Leftrightarrow e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^x} = 1 \text{ ou } \sqrt{e^x} = 2$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \ln 4$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \ln 4$$

وبما أن المتتالية (u_n) تناقصية فإن $l = 0$

ومنه : المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 1

