أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2010

التمرين الأول:

1

لدينا الفلكة $(\mathcal{S})$ معرفة بمعادلتها الديكارتية التالية :

$$(\mathcal{S}):\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$$

نغير شكل المعادلة بالطريقة التالية :

$$(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2-6z)-11=0$$

يعني : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-11=14$

يعني : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$

إذن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1;2;3)$ و شعاعها $R=5$.

2 أ

لدينا : $A(0;-2;0)$ و $B(1;1;-4)$ و $C(0;1;-4)$.

إذن : $\overrightarrow{AB}(1;3;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(0;3;-4)$.

و منه :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}&=\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}\\&=\begin{vmatrix}3&3\\-4&-4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\-4&-4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\3&3\end{vmatrix}\vec{k}\\&=0\vec{i}-(-4)\vec{j}+3\vec{k}\\&=4\vec{j}+3\vec{k}\end{aligned}$$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) .

فإن : المتجهتان $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM}$ متعامدتان.

يعني أن : $\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$

يعني : $\begin{pmatrix}x\\y+2\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}=0$

يعني : $0x+4(y+2)+3z=0$ يعني : $4y+3z+8=0$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2 ب

لدينا : $\Omega(1,2,3)$ و $(ABC)\ :\ 4y+3z+8=0$

إذن : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|0+8+9+8|}{\sqrt{0^2+4^2+3^2}}=\dfrac{25}{\sqrt{25}}=\sqrt{25}=5$

نلاحظ أن : $d(\Omega,(ABC))=R$

إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في النقطة $H(\alpha,\beta,\gamma)$

3 أ

علما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(0,4,3)$ منظمية على المستوى (ABC) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (Δ) .

بما أن (Δ) مار من Ω و عمودي على (ABC) .

فإن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهتان مستقيميتان.

يعني : $\overrightarrow{\Omega M}=t\,\vec{n}\ ;\ (\exists t\in\mathbb{R})$

يعني : $(\Delta)\ :\ \begin{cases}x-1=0t\\y-2=4t\\z-3=3t\end{cases}\ ;\ (t\in\mathbb{R})$

يعني : $(\Delta)\ :\ \begin{cases}x=1\\y=4t+2\\z=3t+3\end{cases}\ ;\ (t\in\mathbb{R})$

و هذه النظمة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

3 ب

لدينا : $\begin{cases}(ABC):4y+3z+8=0\\(\Delta):\begin{cases}x=1\\y=2+4t\\z=3t+3\end{cases}\ ;\ (t\in\mathbb{R})\end{cases}$

نعلم أن $H(\alpha,\beta,\gamma)$ هي نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى (ABC) .

إذن : $\boxed{(\Omega H)\perp(ABC)}$ (1)

و نعلم كذلك أن : $\boxed{(\Delta)\perp(ABC)}$ (2) و $\boxed{\Omega\in(\Delta)}$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $(\Omega H)=(\Delta)$ يعني : $H\in(\Delta)$

و لتحديد إحداثيات النقطة H ننطلق من النظمة التالية : $\begin{cases}H\in(\Delta)\\H\in(ABC)\end{cases}$

و هذه النظمة تُكافئ : $\begin{cases}\alpha=1\\\beta=4t+2\\\gamma=3t+3\\4\beta+3\gamma+8=0\end{cases}\ ;\ (t\in\mathbb{R})$

نعوض قيم α و β و γ في المعادلة الرابعة من النظمة نحصل على :

$$4(4t+2)+3(3t+3)+8=0$$

نحل هذه المعادلة البسيطة نحصل على : $t=-1$

نعوض t بالعدد -1 في المعادلات الثلاث الأولى نجد :

$$\begin{cases}\alpha=1\\\beta=4(-1)+2=-2\\\gamma=3(-1)+3=0\end{cases}$$

و بالتالي : $H(1;-2;0)$ هي نقطة تقاطع (Δ) و المستوى (ABC) .

3 ج

للتحقق من أن $H(1;-2;0)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$ يكفي أن نتحقق من أن مثلوث إحداثيات النقطة H يحقق كلا من معادلتي المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

لدينا : $\begin{cases}(\mathcal{S}):\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0\\(ABC):4y+3z+8=0\end{cases}$

يكفي إذن أن نعوض x و y و z على التوالي بالأعداد 1 و -2 و 0 في معادلتي (ABC) و $(\mathcal{S})$ و نرى هل تتحقق المتساويات.

لدينا : $1^2+(-2)^2+0^2-2\times1-4(-2)-6\times0-11=0$

إذن : $H\in(\mathcal{S})$

و لدينا كذلك : $4(-2)+3(0)+8=-8+8=0$

إذن : $H\in(ABC)$

و بالتالي : H هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

التمرين الثاني:

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}\,z+64=0$

لدينا : $\Delta=(-8\sqrt{3})^2-4\times64=-64=(8i)^2$

إذن : المعادلة تقبل الحلين العقديين z_1 و z_2 المعرفين بما يلي :

$$z_1=\frac{8\sqrt{3}-8i}{2}=4\sqrt{3}-4i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{8\sqrt{3}+8i}{2}=4\sqrt{3}+4i$$

2 أ

لدينا :
$$\begin{cases} aff(A) = a = 8i \\ aff(B) = b = 4\sqrt{3} - 4i \\ aff(C) = c = 2\left(4\sqrt{3} + 4i\right) \\ aff(M) = z \\ aff(M') = z' \end{cases}$$

و لدينا الدوران $\mathcal{R}$ معرف بما يلي : $\mathcal{R}_O\left(\frac{4\pi}{3}\right) : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران $\mathcal{R}$: $(z' - 0) = e^{\frac{i4\pi}{3}}(z - 0)$

ننطلق من الكتابة : $\mathcal{R}(M) = M'$

يعني : $z' = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) z$

يعني : $z' = \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) z$

يعني : $z' = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) z$

يعني : $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$

2 ب

لدينا : $aff(A) \times \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= -4i + 4\sqrt{3} = aff(B)$

حصلنا إذن على العلاقة التالية : $aff(A) = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times aff(B)$

و هي نفسها الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$

و من تلك الكتابة نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = B$

2 ج

لدينا :
$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{8i - \left(4\sqrt{3} - 4i\right)}{2\left(4\sqrt{3} + 4i\right) - \left(4\sqrt{3} - 4i\right)}$$
$$= \frac{12i - 4\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 12i} = \frac{4\sqrt{3}\left(\sqrt{3}i - 1\right)}{4\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{3}i\right)}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{3}i - 1\right)\left(\sqrt{3}i - 1\right)}{\left(1 + \sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3}i - 1\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}i\right)^2 - 2\left(\sqrt{3}i\right) + 1^2}{\left(\sqrt{3}i\right)^2 - 1}$$
$$= \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{-4} = \frac{-2}{-4} + \frac{-2\sqrt{3}i}{-4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

إذن : $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

2 د

حصلنا على : $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ يعني : $\begin{cases} \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} |a-b| = |c-b| \\ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} BA = BC \\ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

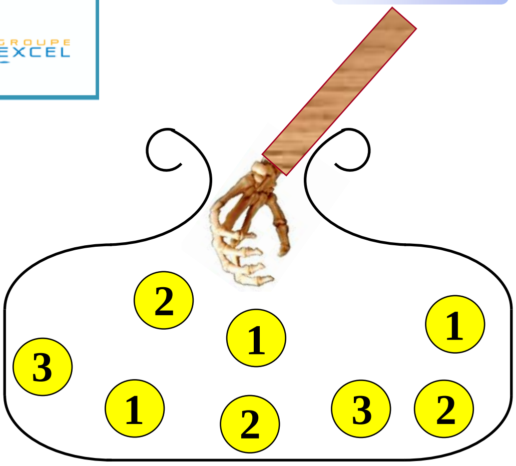
أو بتعبير آخر : $\begin{cases} BA = BC \\ A\hat{B}C = 60° \end{cases}$

و هذا يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B

و قياس الزاوية $\hat{B}$ هو $60°$.

و بالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع .

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على 8 كرات فإنه توجد C_8^1 إمكانية لسحب الكرة الأولى و توجد C_7^1 إمكانية لسحب الكرة الثانية .

إذن هذه التجربة العشوائية تحتمل $C_8^1 \times C_7^1$ نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_8^1 \times C_7^1 = 8 \times 7 = 56$

بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

للحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 لدينا :

C_3^1 إمكانية لسحب كرة أولى تحمل 2 في السحبة الأولى .

C_2^1 إمكانية لسحب كرة ثانية تحمل 2 في السحبة الثانية .

إذن احتمال الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 يساوي :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل 3 يمكن أن يتم عن طريق حالتين و هما :

الحالة الأولى : الحصول على الكرة الأولى تحمل 3 و الكرة الثانية تخالف 3 بـ $C_2^1 \times C_7^1$ إمكانية .

الحالة الثانية : الحصول على الكرة الأولى مخالفة لـ 3 و الكرة الثانية تحمل 3 بـ $C_6^1 \times C_2^1$ إمكانية .

إذن : احتمال الحصول على كرتين إحداهما على الأقل 3 يساوي :

$$p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{C_2^1 \times C_7^1 + C_6^1 \times C_2^1}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

2 أ

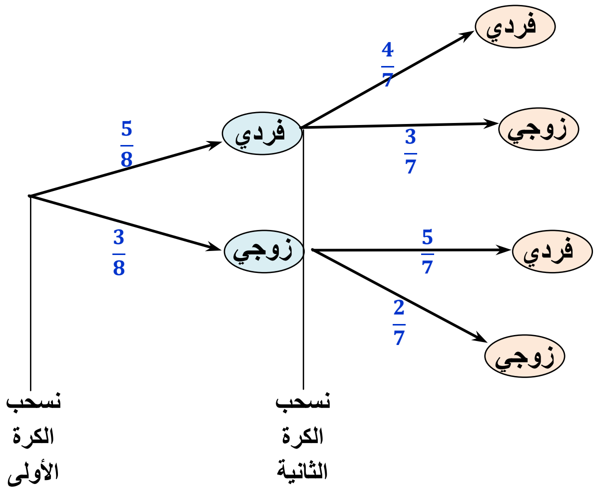
ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

عندما نسحب كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على خمس كرات تحمل أعدادا فردية و 3 كرات تحمل أعدادا زوجية . فإنه يُحتمل أن نحصل على كرات كلها تحمل أعدادا فردية أو كرة واحدة تحمل عددا فرديا .

و يمكن ألا نحصل على أية كرة تحمل عددا فرديا .

إذن : القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 أو 1 أو 2
أو بتعبير أجمل : $X(\Omega) = \{0;1;2\}$

للإجابة على الأسئلة الأخرى نستعين بشجرة الاحتمالات التالية و التي تَمَّ الحصول عليها انطلاقا من التجربة العشوائية (السحب العشوائي بالتتابع و بدون إحلال)



2 ب

$p[X=1]$ هو احتمال الحصول بالضبط على كرة تحمل عددا فرديا .

إذن حسب شجرة الاحتمالات السابقة :

$$p[X=1] = \frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7} = \frac{15}{56}+\frac{15}{56}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$$

2 ج

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X التالي :

$P_X \ : \ \{0;1;2\} \longmapsto [0;1]$

لدينا حسب السؤال 1) : $p(A)=\frac{3}{28}$ إذن : $p[X=0]=\frac{3}{28}$

و لدينا كذلك : $p[X=2] = 1 - p[X=0]-p[X=1]$

$$= 1-\frac{3}{28}-\frac{15}{28}=\frac{5}{14}$$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$\begin{array}{ll} P_X \ : \ \{0;1;2\} \longmapsto [0;1] & \\ 0 \longmapsto p[X=0]=\frac{3}{28} & \\ 1 \longmapsto p[X=1]=\frac{15}{28} & \\ 2 \longmapsto p[X=2]=\frac{5}{14} & \end{array}$$

التمرين الرابع :

1

لنبرهن على صحة العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : (\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_n > 0$

لدينا : $u_0 = 1 > 0$ إذن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_n>0$

إذن : u_n كمية موجبة قطعا .

و منه فإن الكميتان $3u_n$ و u_n+21 موجبتان قطعا كذلك .

إذن الكمية $\frac{3u_n}{u_n+21}$ موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين .

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ \frac{3u_n}{21+u_n}>0$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1}>0$

يعني أن العبارة (P_{n+1}) عبارة صحيحة .

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_n>0$

2

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا : $u_n>0$ إذن التعبير $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مُعَرَّف . (المقام يجب أن يخالف الصفر)

لدينا : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3u_n}{21+u_n}\times\frac{1}{u_n}=\frac{3}{21+u_n}$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3}{21+u_n}$

نعلم أن : $u_n>0$ إذن : $21+u_n>21$

يعني : $\frac{1}{21+u_n}<\frac{1}{21}$ يعني : $\frac{3}{21+u_n}<\frac{3}{21}$

يعني : $\frac{3}{21+u_n}<\frac{1}{7}$ يعني : $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1}{7}$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$

3

نعلم أن : $\frac{1}{7}<1$

نضرب هذه المتفاوتة في العدد الموجب قطعا u_n نحصل على :

$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ \frac{1}{7}u_n<u_n}$ (1)

و نعلم كذلك حسب السؤال 2) أن : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n}$ (2)

إذن من النتيجتين (1) و (2) نجد ما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1}<u_n$

و بالتالي : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

و بما أنها مصغورة بالعدد 0 ($u_n>0$) فإنها متقاربة .

4 أ

من أجل $n=0$. لدينا : $u_0=1\leq\left(\frac{1}{7}\right)^0$

إذن العبارة صحيحة من أجل $n=0$

نفترض أن $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$

لدينا حسب السؤال 2) : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n\leq\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^n$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1}\leq\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

إذن العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$

4 ب

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ 0<u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$

و بما أن : $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1

فإن : $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \underset{\substack{\swarrow n\infty \\ 0}}{0} < u_n \le \underset{\substack{\swarrow n\infty \\ 0}}{\left(\frac{1}{7}\right)^n}$

و بالتالي : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول على الصفر . $\lim\limits_{n\infty} u_n = 0$

التمرين الخامس :

I) 1) أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا :

$$\begin{aligned}(x-1)(3x^2+3x+2) &= 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2 \\ &= 3x^3-x-2\end{aligned}$$

I) 1) ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $g(x) = x^3-x-2\ln x+3$ إذن :

$$g'(x) = 3x^2-1-\frac{2}{x} = \frac{3x^3-x-2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

I) 2) أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. يعني : $x>0$

إذن : $3x^2+3x+2>0$ و $x>0$

و منه : $\frac{3x^2+3x+2}{x}$ موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين قطعا .

و بالتالي : $(\forall x>0)\ ;\ \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$

I) 2) ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

و لقد علمنا من قبلُ أن : $(\forall x>0)\ ;\ \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$

إذن : إشارة $g'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(x-1)$ على المجال $]0;+\infty[$.

I) 3) أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1]$. إذن : $x\le 1$

يعني : $(x-1)\le 0$ و منه : $g'(x)\le 0$

يعني أن الدالة g تناقصية على المجال $]0,1]$.

ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$. إذن : $x\ge 1$

و منه : $(x-1)\ge 0$ يعني : $g'(x)\ge 0$

يعني أن الدالة g تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

I) 3) ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : $x\in]0,1]$ يعني : $x\le 1$

إذن : $g(x)\ge g(1)$ (لأن g تناقصية على $]0;1]$)

و لدينا : $g(1)>0$. إذن : $\boxed{\forall x\in]0;1]\ ;\ g(x)>0}$ **(1)**

الحالة الثانية : $x\in [1;+\infty[$ يعني : $x\ge 1$

إذن : $g(x)\ge g(1)$ (لأن g تزايدية على $[1;+\infty[$)

و لدينا : $g(1)>0$. إذن : $\boxed{\forall x\in [1;+\infty[\ ;\ g(x)>0}$ **(2)**

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ g(x)>0$.

II) 1

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x) = x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$

إذن :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1+\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)-2x(x-1+\ln x)}{x^4} \\ &= 1+\frac{x^2+x-2x^2+2x-2x\ln x}{x^4} \\ &= 1+\frac{-x^2+3x-2x\ln x}{x^4} = \frac{x^3-x-2\ln x+3}{x^3}\end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

نعلم حسب السؤال I) 3) ب) : $(\forall x>0)\ ;\ g(x)>0$

و لدينا : $(\forall x>0)\ ;\ x^3>0$

إذن : $(\forall x>0)\ ;\ \frac{g(x)}{x^3}>0$

يعني : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x)>0$

و بالتالي : f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

II) 2) أ

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0^+}\left(x-1+\underset{\substack{\swarrow 0^+ \\ +\infty}}{\frac{1}{x}}\left(1-\underset{\substack{\swarrow 0^+ \\ +\infty}}{\frac{1}{x}}+\underset{\substack{\swarrow 0^+ \\ -\infty}}{\frac{\ln x}{x}}\right)\right) \\ &= 0-1+(+\infty)(1-\infty-\infty) \\ &= -1+(+\infty)(+\infty) = -1-\infty = -\infty\end{aligned}$$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

و تأويل هذه النهاية هندسيا هو : " المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (محور الأراتيب) مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر على اليمين

II) 2) ب

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right) \\ &= 0(1-0+0) = 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(x-1) + \lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$

$$= (+\infty)+0 = +\infty$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ (1)

II 2 ج

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{x-1+\ln x}{x^3}\right)$

$$= 1-0+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= 1+0(1-0+0) = 1$$

إذن : (2) $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1}$

و لدينا كذلك : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$

$$= -1+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$

$$= -1+0 = -1$$

إذن : (3) $\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = -1}$

من النهايات (1) و (2) و (3) نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

II 3

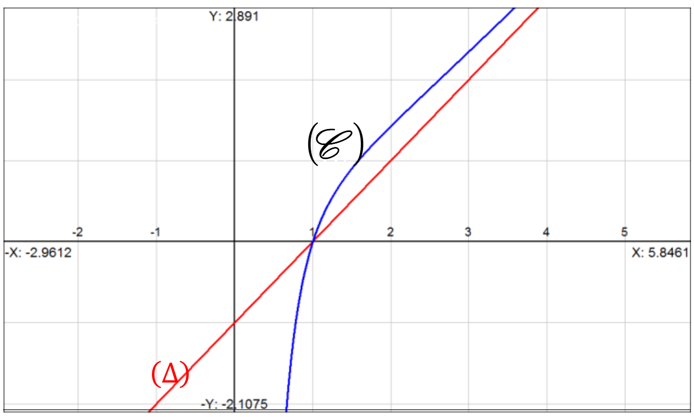
معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي زوج إحداثيتيها $(1,0)$

تكتب على الشكل : $(T) : y = f'(1)(x-1)+f(1)$

لدينا : $f(1)=0$ و $f'(1)=3$

إذن : $(T) : y = 3(x-1)$

II 4



II 5 أ

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int_1^e \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{u'} \times \underbrace{(\ln x)}_{v}\,dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv\,dx$$

$$= \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$= \frac{-1}{e}-\frac{1}{e}+1 = \boxed{1-\frac{2}{e}}$$

II 5 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

نقيس المساحة $\mathcal{A}$ باستعمال التكامل التالي :

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)-(x+1)|\,dx = \int_1^e \left|\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right| dx$$

و لدينا : $x \in [1,e]$ إذن : $\boxed{x>1}$ (1) و منه : $\boxed{\ln x > 0}$ (2)

نجمع المتفاوتتين (1) و (2) طرفا بطرف نجد : $x+\ln x > 1$

يعني : $\forall\, x \in [1,e]\ ;\ x-1+\ln x > 0$

و منه : $\forall\, x \in [1;e]\ ;\ \frac{x-1+\ln x}{x^2} > 0$

أي : $\forall\, x \in [1;e]\ ;\ \left|\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right| = \frac{x-1+\ln x}{x^2}$

و بالتالي بالرجوع إلى آخر تعبير للمساحة $\mathcal{A}$ نجد :

$$\mathcal{A} = \int_1^e \left|\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right| dx = \int_1^e \left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right) dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x}\,dx - \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$$= [\ln x]_1^e - \left[\frac{-1}{x}\right]_1^e + \left(1-\frac{2}{e}\right)$$

$$= 1-\left(\frac{-1}{e}+1\right)+\left(1-\frac{2}{e}\right) = \left(1-\frac{2}{e}\right)\ unité^2$$

$$= \left(1-\frac{1}{e}\right)(1\ cm)^2 = \left(1-\frac{1}{e}\right)\ cm^2$$