

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2011

التمرين الأول :



نحل في \mathbb{R} المعادلة : $x^2 - 2x - 3 = 0$
 لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4(-3) = 16$
 إذن : المعادلة تقبل حلين حقيقيين x_1 و x_2 :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3$$

1 ب

نحل في \mathbb{R} المعادلة : $e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0$
 بعد توحيد المقام نحصل على : $\frac{e^{2x} - 3 - 2e^x}{e^x} = 0$
 يعني : $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$
 نضع : $t = e^x$. إذن المعادلة تُصبح : $t^2 - 2t - 3 = 0$
 ونعلم حسب السؤال (أ) أن : حلّي هذه المعادلة هما -1 و 3 .
 إذن : $t = 3$ أو $t = -1$
 يعني : $e^x = 3$ أو $e^x = -1$
 نعلم أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0$
 إذن المعادلة $e^x = -1$ لا تقبل حولا في \mathbb{R} . وبالتالي : $e^x = 3$
 يعني : $\ln(e^x) = \ln 3$ أي : $x = \ln 3$
 وبالتالي : المعادلة تقبل حلا وحيدا في \mathbb{R} وهو العدد الحقيقي $\ln 3$.

2

نحل في \mathbb{R} المتراجحة : $e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$
 بعد تعميل الطرف الأيسر نحصل على : $e^{-x}(e^{2x+1} - 1) \geq 0$
 نلاحظ أن إشارة الطرف الأيسر تتعلق فقط بإشارة $(e^{2x+1} - 1)$
 وذلك لأن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^{-x} > 0$
 لنحل أولا المعادلة $e^{2x+1} - 1 = 0$ التي تعني : $e^{2x+1} = 1$
 إذن : $2x + 1 = \ln 1$ أي $2x + 1 = 0$ أي $x = -\frac{1}{2}$
 وبذلك نستنتج جدول الإشارة التالي :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
e^{-x}	+	+	+
$e^{2x+1} - 1$	-	0	+
$e^{-x}(e^{2x+1} - 1)$	-	0	+

من خلال الجدول : $e^{-x}(e^{2x+1} - 1) \geq 0$; $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$
 إذن (S) مجموعة حلول المتراجحة هي : $S = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

التمرين الثاني :

1

نحل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - 6z + 18 = 0$
 لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4(18) = -36 = (6i)^2$
 إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$z_1 = \frac{6 - 6i}{2} = 3(1 - i) \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{6 + 6i}{2} = 3(1 + i)$$

2 أ

$$\begin{aligned} a &= 3 + 3i = 3(1 + i) & b &= 3 - 3i = 3(1 - i) \\ &= 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) & &= 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) & &= 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} & &= 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} - i \sin \frac{-\pi}{4} \right) \\ & & &= 3\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

2 ب

$$\begin{cases} aff(A) = a = 3 + 3i = 3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ aff(B) = b = 3 - 3i = 3\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ aff(B') = b' \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

ولدينا كذلك الإزاحة t معرفة بما يلي : $(\mathcal{P}) \rightarrow (\mathcal{P})$
 $M \rightarrow M' = t_{\overline{OA}}(M)$

لدينا : $t_{\overline{OA}}(B) = B'$

إذن : حسب التعريف المتجهي للإزاحة نكتب : $\overline{BB'} = \overline{OA}$
 وباستعمال التعبيرات العقدية نكتب :

$$\begin{aligned} aff(B') - aff(B) &= aff(A) - aff(O) \\ b' - 3 + 3i &= 3 + 3i \quad \text{يعني : } b' - b = a \\ aff(B') &= 6 \quad \text{يعني : } b' = 3 + 3i + 3 - 3i = 6 \quad \text{و بالتالي :} \end{aligned}$$

2 ج

$$\begin{aligned} \frac{b - b'}{a - b'} &= \frac{3 - 3i - 6}{3 + 3i - 6} = \frac{-3(i + 1)}{-3(1 - i)} = \frac{i + 1}{1 - i} \quad \text{لدينا :} \\ &= \frac{(i + 1)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2i}{1^2 - i^2} = \frac{2i}{1 - (-1)} = \frac{2i}{2} = i \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \left| \frac{b - b'}{a - b'} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{b - b'}{a - b'} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b - b'}{a - b'} = i \quad \text{و بالتالي :} \\ \text{ومنه نستنتج أن :} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |b - b'| = |a - b'| \\ \arg \left(\frac{b - b'}{a - b'} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

$$\begin{cases} \overline{B'B} = \overline{B'A} \\ \arg \left(\frac{b - b'}{a - b'} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad \text{يعني :}$$



و من هاتين النتيجةين نستنتج أن المثلث ABB' متساوي الساقين رأسه B'
 وكذلك قائم الزاوية في نفس النقطة B' .

و بالتالي $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n$

إذن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$.

ومن هنا الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ يُكتب على الشكل التالي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = v_0 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-0}$$

$$\text{لدينا : } v_0 = 1 - \frac{1}{3u_0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

● **3** ●

لدينا حسب السؤال (2) : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - \frac{1}{3u_n} = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{3u_n}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$ و هو عدد حقيقي أصغر من 1 .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}\right) = \frac{1}{3 - 2 \times 0} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \frac{1}{3}$$

● **التمرين الرابع** ●

● **1** ●

ليكن x عنصرا من المجال $I =]0; +\infty[$.

$$\text{لدينا : } g(x) = x - 1 + \ln x$$

$$\text{إذن : } g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$(\forall x \in I) ; g'(x) = \frac{x+1}{x}$$

● **1** ●

ليكن x عنصرا من المجال I . إذن : $x > 0$

$$\text{ومن هنا : } x + 1 > 1 > 0$$

$$(\forall x \in I) ; \frac{x+1}{x} > 0$$

$$(\forall x \in I) ; g'(x) > 0$$

أي أن الدالة g تزايدية قطعاً على المجال I .

● **2** ●

$$\begin{cases} OA = |z_A - z_0| = |a| = \left|3\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right| = 3\sqrt{2} \\ AB' = |z_{B'} - z_A| = |6 - 3 - 3i| = |3 - 3i| = 3\sqrt{2} \\ B'B = |z_B - z_{B'}| = |3 - 3i - 6| = 3\sqrt{2} \\ BO = |z_0 - z_B| = |-3 + 3i| = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

نستنتج إذن أن : $OA = AB' = B'B = BO$.
ومن هنا فإن الرباعي $OAB'B$ معين لأن جميع أضلاعه متقايسة .
وبما أن الزاوية \widehat{B} زاوية قائمة حسب نتيجة السؤال ج) .
فإن الرباعي $OAB'B$ مربع لأنه معين وإحدى زواياه قائمة .

● **التمرين الثالث** ●

● **1** ●

$$\text{ليكن } n \text{ عنصرا من } \mathbb{N} . \text{ لدينا : } u_{n+1} = \frac{6u_n}{1 + 15u_n}$$

$$\text{إذن : } u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{6u_n}{1 + 15u_n} - \frac{1}{3}$$

$$\text{يعني : } u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{18u_n - (1 + 15u_n)}{3(1 + 15u_n)}$$

$$\text{يعني : } u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{3u_n - 1}{3(1 + 15u_n)}$$

$$(\ast) \quad u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1 + 15u_n}$$

● **1** ●

لنبرهن على صحة العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \frac{1}{3}$.
لدينا : $u_0 = 1 > \frac{1}{3}$. إذن العبارة (P_0) صحيحة .

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \frac{1}{3}$$

$$\text{إذن : } (u_n - \frac{1}{3}) > 0 \text{ و } (15u_n + 1) > 6 > 0$$

ومن هنا فإن الكمية $\frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$ موجبة قطعاً لأنها خارج كميتين موجبتين قطعاً

$$\text{يعني : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1} > 0$$

$$\text{ومن هنا حسب النتيجة } (\ast) : (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - \frac{1}{3} > 0$$

$$\text{أي : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > \frac{1}{3}$$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

$$\text{و بالتالي حسب مبدأ التراجع : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \frac{1}{3}$$

● **2** ●

ليكن n عنصرا من المجموعة \mathbb{N} . لدينا :

$$v_{n+1} = 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1 + 15u_n}{6u_n}\right) = 1 - \frac{1 + 15u_n}{18u_n}$$

$$= \frac{18 - (1 + 15u_n)}{18u_n} = \frac{3u_n - 1}{18u_n} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{6u_n}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{u_n - \frac{1}{3}}{u_n}\right) = \frac{1}{6} v_n$$

2 II ب

ليكن x عنصرا من المجال $[1; +\infty[$.

إذن حسب نتيجة السؤال (I) : $g(x) \geq 0$

يعني : $\frac{g(x)}{x^2} \geq 0$ (لأن : $x > 0$)

ومنه : $\forall x \in [1; +\infty[; f'(x) \geq 0$

يعني أن الدالة تزايدية على المجال $[1; +\infty[$

ليكن x عنصرا من المجال $]0; 1]$.

إذن حسب نتيجة السؤال (I) : $g(x) \leq 0$

يعني : $\frac{g(x)}{x^2} \leq 0$ (لأن : $x > 0$)

ومنه : $\forall x \in]0; 1] ; f'(x) \leq 0$

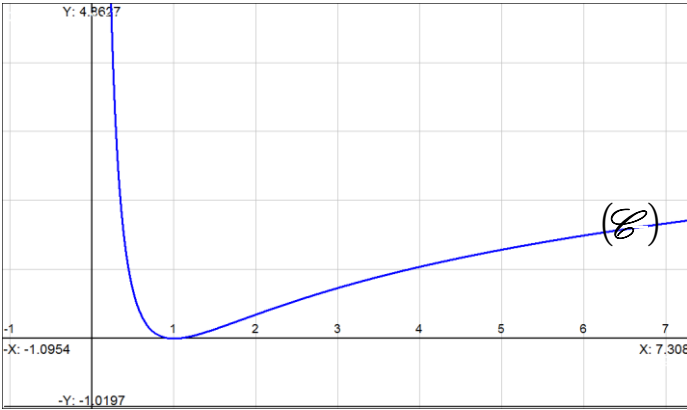
يعني أن الدالة f تناقصية على المجال $]0; 1]$



2 II ج

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
			+
f	$+\infty$		$+\infty$

3 II



4 II أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا : $H(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$

إذن : $H'(x) = \frac{2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}}{2} = \frac{\ln x}{x} = h(x)$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة h على المجال I .

4 II ب

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

2 I

ليكن x عنصرا من المجال $[1; +\infty[$. إذن : $x \geq 1$
ومنه : $g(x) \geq g(1)$ لأن g دالة تزايدية قطاعا على I

ولدينا : $g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$

إذن : $\forall x \in [1; +\infty[; g(x) \geq 0$

ليكن x عنصرا من المجال $]0; 1]$. إذن : $x \leq 1$

ومنه : $g(x) \leq g(1)$ لأن g دالة تزايدية على I .

ولدينا : $g(1) = 0$

إذن : $\forall x \in]0; 1] ; g(x) \leq 0$

1 II أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) \ln x$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-1}{x} \right) \ln x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \ln x = \left(1 - \frac{1}{0^+} \right) (-\infty)$$

$$= (1 - \infty)(-\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ وتأويلها الهندسي هو أن المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور الأرتايب) مقارب عمودي للمنحنى (E) بجوار الصفر على اليمين.

1 II ب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \ln x$$

$$= \left(1 - \frac{1}{+\infty} \right) (+\infty) = (1 - 0)(+\infty) = +\infty$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \frac{\ln x}{x}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{+\infty} \right) (0) = (1 - 0)(0) = 0$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (2)

1 II ج

من النهايتين (1) و (2) نستنتج أن المنحنى (E) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

2 II أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) \ln x$

إذن : $f'(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) \ln x + (\ln x)' \left(\frac{x-1}{x} \right)$

$$= \left(\frac{x - (x-1)}{x^2} \right) \ln x + \frac{1}{x} \left(\frac{x-1}{x} \right)$$

$$= \frac{\ln x + x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

إذن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)



4 II

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x \, dx &= \int_1^e \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_v \, dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv' \, dx \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx \\ &= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = [x \ln x - x]_1^e \\ &= (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = 0 - (-1) = 1\end{aligned}$$

5 II

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا :

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln x = \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}$

5 II

لتكن \mathcal{A} مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى (\mathcal{C}) و محور الأفصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$. نعلم أن التكامل يقيس دائما طول أو مساحة أو حجم .

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)| \, dx \quad \text{إذن :}$$

نلاحظ حسب جدول تغيرات الدالة f أن 0 قيمة دنوية للدالة f على I .
يعني : $(\forall x \in I) ; f(x) \geq 0$
و منه : $(\forall x \in I) ; |f(x)| = f(x)$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^e |f(x)| \, dx = \int_1^e f(x) \, dx = \int_1^e \left(\ln x - \frac{\ln x}{x}\right) dx \quad \text{إذن :} \\ &= \int_1^e \ln x \, dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\text{unité})^2 \\ &= \frac{1}{2} (1 \text{ cm})^2 = 0,5 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

