التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط : $A(-3,0,0)$ و $B(0,0,-3)$ و $C(0,2,-2)$ و الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ و شعاعها هو 3

1 أ — بين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ — 1,25 ن
ثم استنتج أن $2x-y+2z+6=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

1 ب — أحسب $d(\Omega,(ABC))$ و استنتج أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) . — 0,75 ن

2 — ليكن (D) المستقيم المار من Ω و العمودي على (ABC) .

2 أ — بين أن : $\begin{cases}x=1+2t\\ y=1-t \quad ; \quad (t\epsilon\mathbb{R})\\ z=1+2t\end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (D) . — 0,50 ن

2 ب — بين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S) هو $(-1,2,-1)$. — 0,50 ن

التمرين الثاني : (3 ن)

1 — نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث : $a=(2-i)$ و $b=(6-7i)$ و $c=(8+3i)$

1 أ — بين أن : $\frac{c-a}{b-a}=i$ — 0,75 ن

1 ب — استنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في A . — 0,75 ن

2 — ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق M' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة Ω منتصف $[BC]$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

2 أ — تحقق من أن لحق النقطة Ω هو $\omega=(7-2i)$. — 0,50 ن

2 ب — بين أن : $z'=-iz+9+5i$ — 0,75 ن

2 ج — بين أن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران $\mathcal{R}$. — 0,25 ن

التمرين الثالث : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} \quad ; \quad (\forall n\epsilon\mathbb{N})\\ u_0=3\end{cases}$

1 — بين بالترجع أن : $u_n>1 \quad ; \quad (\forall n\epsilon\mathbb{N})$. — 0,50 ن

2 — نضع : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1} \quad ; \quad (\forall n\epsilon\mathbb{N})$

2 أ — تحقق من أن : $1-v_n=\dfrac{2}{u_n+1} \quad ; \quad (\forall n\epsilon\mathbb{N})$ و استنتج أن : $1-u_n>0 \quad ; \quad (\forall n\epsilon\mathbb{N})$ — 0,50 ن

2 ب — بين أن : $u_n=\dfrac{1+v_n}{1-v_n} \quad ; \quad (\forall n\epsilon\mathbb{N})$ — 0,50 ن

1,00 ن | 3 | أ | بين أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و اكتب v_n بدلالة n .

0,50 ن | 3 | ب | بين أن : $\lim_{n\infty} v_n = 0$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$.

التمرين الرابع : (3 ن)

يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء و أربع كرات بيضاء و ثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

1,00 ن | 1 | بين ان احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء هو $\frac{1}{22}$.

1,00 ن | 2 | بين أن احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون هو $\frac{3}{44}$.

1,00 ن | 3 | بين أن احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل هو $\frac{37}{44}$.

التمرين الخامس : (8 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لـ f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0,75 ن | 1 | بين أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(-x) = -f(x)$ و استنتج أن O مركز تماثل المنحنى $(\mathscr{C})$.

0,50 ن | 2 | تحقق من أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

(يستحسن استعمال هذه الصيغة لـ $f(x)$ لمعالجة الأسئلة الموالية)

1,25 ن | 3 | أ | بين أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ و تحقق أن : $f'(0) = \frac{3}{2}$.

0,50 ن | 3 | ب | بين أن الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$.

0,50 ن | 3 | ج | بين أن $y = \frac{3}{2}x$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة O .

0,50 ن | 4 | أ | بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0,50 ن | 4 | ب | أحسب $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (x+1)\right)$ و استنتج أن $(D) : y = x + 1$ مقارب لـ $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$

0,25 ن | 4 | ج | بين أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد تحت المستقيم (D) .

1,50 ن | 5 | أنشئ المستقيمين (D) و (T) و المنحنى $(\mathscr{C})$ (نذكر أن O مركز تماثل $(\mathscr{C})$).

0,75 ن | 6 | أ | بين أن الدالة : $H : x \to x - \ln(e^x + 1)$ دالة أصلية للدالة $h : x \to \frac{1}{e^x+1}$ على $\mathbb{R}$.

0,50 ن | 6 | ب | استنتج أن : $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1}dx = \ln 4 - \ln 3$

0,50 ن | 6 | ج | أحسب مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C})$ و (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x = 0$ و $x = \ln 2$.