

# أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2012

التمرين الأول :

1 أ

لدينا :  $\begin{cases} A(-3,0,0) \\ B(0,0,-3) \\ C(0,2,-2) \end{cases}$  إذن :  $\begin{cases} \overline{AB}(3,0,-3) \\ \overline{AC}(3,2,-2) \end{cases}$

ومنه :  $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & | & 3 & 3 \\ -3 & -2 & | & -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$

$= 6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$

إذن :  $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = (6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k})$

و نعلم أن المتجهة  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  متجهة منظمية على  $(ABC)$ .

لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من المستوى  $(ABC)$ .

بما أن المتجهة  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  منظمية على المستوى  $(ABC)$ .

فإن المتجهتان  $\overline{AM}$  و  $(\overline{AB} \wedge \overline{AC})$  متعامدتان.

يعني :  $\overline{AM} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = 0$

يعني :  $\begin{pmatrix} x+3 \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

يعني :  $6(x+3) - 3y + 6z = 0$

يعني :  $2x - y + 2z + 6 = 0$

و هذه الكتابة الأخيرة هي معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$ .

1 ب

لدينا :  $\begin{cases} (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \\ \Omega(1,1,1) \end{cases}$

إذن :  $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 1 - 1 + 2 \times 1 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$

نلاحظ إذن أن :  $d(\Omega, (ABC)) = 3 = \text{Rayon}(\mathcal{S})$

إذن : المستوى  $(ABC)$  مماس للكرة  $(\mathcal{S})$  في نقطة  $H(\alpha, \beta, \gamma)$ .

2 أ

لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من المستقيم  $(D)$ . لدينا  $(D) \perp (ABC)$

بما أن المتجهة  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  منظمية على المستوى  $(ABC)$

فإن المتجهتان  $\overline{OM}$  و  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  مستقيمتان.

يعني :  $(\exists \theta \in \mathbb{R}) ; \overline{OM} = \theta(\overline{AB} \wedge \overline{AC})$

يعني :  $(\exists \theta \in \mathbb{R}) ; \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

يعني :  $(D) : \begin{cases} x-1 = 6\theta \\ y-1 = -3\theta \\ z-1 = 6\theta \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R})$

يعني :  $(D) : \begin{cases} x = 6\theta + 1 \\ y = -3\theta + 1 \\ z = 6\theta + 1 \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R})$

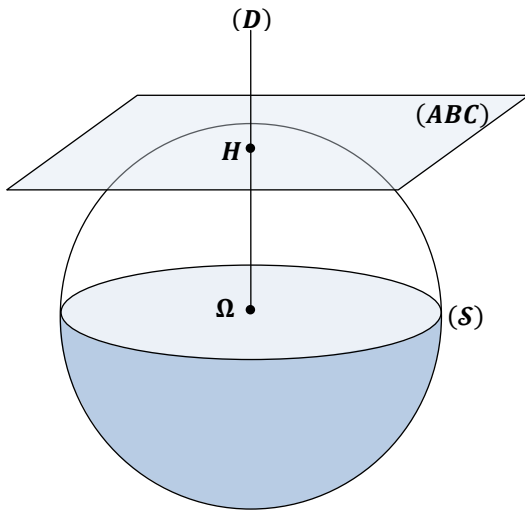
يعني :  $(D) : \begin{cases} x = 2(3\theta) + 1 \\ y = -(3\theta) + 1 \\ z = 2(3\theta) + 1 \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R})$

نضع  $3\theta = t$  نحصل على :  $(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامترى للمستقيم  $(D)$ .

2 ب

في هذا السؤال سوف نستعمل التمثيل البارامترى للمستقيم  $(D)$  و المعادلة الديكارتية للمستوى  $(ABC)$ . و نستعين بالشكل التالي :



بما أن المستوى  $(ABC)$  مماس لـ  $(\mathcal{S})$  في  $H$ . فإن :  $(\Omega H) \perp (ABC)$

و نعلم أن :  $(D) \perp (ABC)$  (1)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن :  $(\Omega H) \parallel (D)$

و بما أن  $\Omega$  نقطة مشتركة بين المستقيمين  $(\Omega H)$  و  $(D)$ .

فإن المستقيمان  $(D)$  و  $(\Omega H)$  منطبقان. يعني :  $H \in (D)$  (3)

حصلنا إذن على ما يلي :  $\begin{cases} H \in (D) \\ H \in (ABC) \end{cases}$

و لدينا :  $(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

و لدينا كذلك :  $\begin{cases} H(\alpha, \beta, \gamma) \\ (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \end{cases}$

بما أن  $H(\alpha, \beta, \gamma)$  نقطة مشتركة بين المستقيم  $(D)$  و المستوى  $(ABC)$ .

فإن المثلث  $(\alpha, \beta, \gamma)$  يحقق كلاً من التمثيل البارامترى للمستقيم  $(D)$

و المعادلة الديكارتية للمستوى  $(ABC)$ .

إذن :  $(\exists t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} \alpha = 2t + 1 \\ \beta = -t + 1 \\ \gamma = 2t + 1 \\ 2\alpha - \beta + 2\gamma + 6 = 0 \end{cases}$

نعوض قيم  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  في المعادلة الأخيرة نحصل على :

$2(2t + 1) - (-t + 1) + 2(2t + 1) + 6 = 0$

يعني :  $4t + t + 4t + 9 = 0$  إذن :  $t = -1$



## ج 2

يكفي أن نبرهن على أن :  $aff(C) = -i aff(A) + 5i + 9$   
 لدينا حسب المعطيات :  $aff(A) = a = (2 - i)$   
 إذن :  $-i aff(A) + 5i + 9 = -i(2 - i) + 5i + 9$   
 $= -2i - 1 + 5i + 9 = 3i + 8 = aff(C)$   
 حصلنا إذن على :  $-i aff(A) + 5i + 9 = aff(C)$   
 إذن حسب الكتابة العقدية للدوران  $\mathcal{R}$  نستنتج أن :  $\mathcal{R}(A) = C$

### التمرين الثالث :

## 1

نعتبر العبارة  $(P_n)$  التالية :  $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$   
 من أجل  $n = 0$  لدينا :  $u_0 = 3 > 1$  . إذن العبارة  $(P_0)$  صحيحة .  
 ليكن  $n \in \mathbb{N}$  نفترض أن :  $u_n > 1$  .  
 نحتاج إلى أن نبرهن على أن :  $u_{n+1} > 1$   
 و عادة ما ننطلق من  $u_{n+1} > 1$  لكي نحدد العبارة التي سننطلق منها  
 باستعمال المسار العكسي و هو ما سوف أعرضه الآن :

نحتاج إلى :  $u_{n+1} > 1$   
 يعني نحتاج إلى :  $\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} > 1$   
 يعني نحتاج إلى :  $4u_n + 3 > 3u_n + 4$   
 يعني نحتاج إلى :  $u_n > 1$   
 و هذه المتفاوتة متوفرة لدينا حسب الافتراض

إذن تمكنا من إيجاد المسار العكسي للبرهان .  
 و البرهان الذي يجب كتابته على ورقة التحرير هو التالي :  
 لدينا حسب الافتراض :  $u_n > 1$   
 إذن :  $4u_n - 3u_n > 4 - 3$  يعني :  $4u_n + 3 > 3u_n + 4$   
 يعني :  $\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} > 1$  يعني :  $u_{n+1} > 1$   
 أي أن العبارة  $(P_{n+1})$  صحيحة .

خلاصة : حصلنا على النتائج التالية :  $\{ (P_0) \text{ est vraie} \}$   
 $\{ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; (\forall n \in \mathbb{N}) \}$

إذن حسب مبدأ التراجع :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$

## 2

ليكن :  $(n \in \mathbb{N})$  . لدينا :  $1 - v_n = 1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$   
 $= \frac{u_n + 1}{u_n + 1} - \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{2}{u_n + 1}$   
 إذن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$   
 و نعلم حسب السؤال (1) أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$   
 إذن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + 1 > 2 > 0$   
 يعني :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{u_n + 1} > 0$   
 يعني :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{2}{u_n + 1} > 0$   
 يعني :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n > 0$



نعوض  $t$  بقيمته  $-1$  في المعادلات الثلاث الأولى نحصل على :

$$\begin{cases} \alpha = 2(-1) + 1 = -1 \\ \beta = -(-1) + 1 = 2 \\ \gamma = 2(-1) + 1 = -1 \end{cases}$$



و بالتالي :  $H(-1, 2, -1)$  هي نقطة تماس المستوى  $(ABC)$  و الفلكة  $(S)$

### التمرين الثاني :

## 1

لدينا :  $\frac{c - a}{b - a} = \frac{(8 + 3i) - (2 - i)}{(6 - 7i) - (2 - i)} = \frac{6 + 4i}{4 - 6i} = \frac{3 + 2i}{2 - 3i}$   
 $= \frac{(3 + 2i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{6 + 13i - 6}{2^2 - (3i)^2} = \frac{13i}{4 + 9} = \frac{13i}{13} = i$   
 و بالتالي :  $(*) \frac{c - a}{b - a} = i$

## 2

لدينا :  $\frac{c - a}{b - a} = i$  إذن :  $\begin{cases} \left| \frac{c - a}{b - a} \right| = |i| \\ \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \equiv \arg(i) [2\pi] \end{cases}$   
 يعني :  $\begin{cases} \left| \frac{c - a}{b - a} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$   
 يعني :  $\begin{cases} AC = AB \\ \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

و بالتالي  $ABC$  مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في نفس النقطة  $A$  .

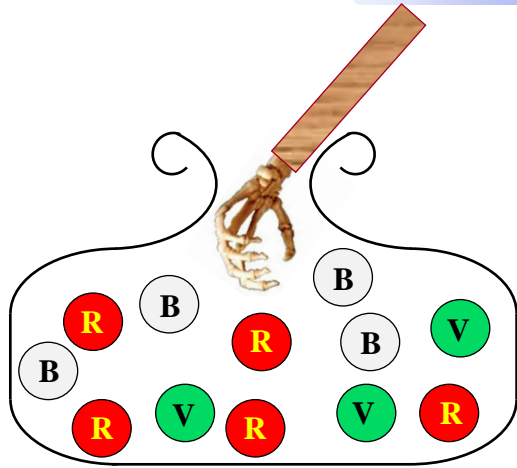
## 2

لدينا  $\Omega$  منتصف القطعة  $[BC]$  . إذن :  $aff(\Omega) = \frac{aff(B) + aff(C)}{2}$   
 يعني :  $aff(\Omega) = \frac{(6 - 7i) + (8 + 3i)}{2} = (7 - 2i) = \omega$

## 2

لدينا دوران مُعرّف بما يلي :  $\mathcal{R}_\Omega\left(\frac{-\pi}{2}\right) : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P})$   
 $M(z) \mapsto M'(z')$   
 و ننطلق من الكتابة التالية :  $\mathcal{R}(M) = M'$   
 $\Leftrightarrow (z' - \omega) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z - \omega)$   
 $\Leftrightarrow z' - (7 - 2i) = \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)(z - 7 + 2i)$   
 $\Leftrightarrow z' - (7 - 2i) = (-i)(z - 7 + 2i)$   
 $\Leftrightarrow z' = -iz + 7i + 2 + 7 - 2i$   
 $\Leftrightarrow z' = -iz + 5i + 9$   
 و هذه الكتابة الأخيرة تُعبّر عن الكتابة العقدية للدوران  $\mathcal{R}$  .  
 و بذلك يصبح الدوران  $\mathcal{R}$  مُعرّف بما يلي :  
 $\mathcal{R}_\Omega\left(\frac{-\pi}{2}\right) : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P})$   
 $M(z) \mapsto M'(-iz + 5i + 9)$

التمرين الرابع:



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من كيس يحتوي على 12 كرة فإن التجربة تُحتمل  $C_{12}^3$  نتيجة ممكنة .  
يعني :  $card(\Omega) = C_{12}^3 = 220$  . بحيث  $\Omega$  هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

$$p \left( \begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right) = \frac{card \left( \begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right)}{card(\Omega)} = \frac{C_5^3}{220} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

2

$$p \left( \begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات من} \\ \text{نفس اللون} \end{array} \right) = p \left( \begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right) + p \left( \begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right) + p \left( \begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right)$$

$$= \frac{card \left( \begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right)}{card(\Omega)} + \frac{card \left( \begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right)}{card(\Omega)} + \frac{card \left( \begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right)}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_5^3}{220} + \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} = \frac{10}{220} + \frac{4}{220} + \frac{1}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

3

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :  
الطريقة الأولى:

$$p \left( \begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{كرة حمراء} \\ \text{واحدة على الأقل} \end{array} \right) = p \left( \begin{array}{c} \text{كرتين حمراوين} \\ \text{أو الأخرى} \\ \text{مخالفة للأحمر} \end{array} \text{ كرة حمراء و} \right) + p \left( \begin{array}{c} \text{كرتان تخالفان} \\ \text{اللون الأحمر} \end{array} \right)$$

$$= p \left( \begin{array}{c} \text{كرتين حمراوين} \\ \text{و الأخرى} \\ \text{مخالفة للأحمر} \end{array} \right) + p \left( \begin{array}{c} \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right)$$

$$= \frac{C_5^1 \times C_7^2}{card(\Omega)} + \frac{C_5^2 \times C_7^1}{card(\Omega)} + \frac{C_5^3 \times C_7^0}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{5 \times 21}{220} + \frac{10 \times 7}{220} + \frac{10}{220} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$$



2 ب

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  . لدينا حسب السؤال أ) :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

إذن :  $v_n(u_n + 1) = u_n - 1$

يعني :  $v_n u_n + v_n = u_n - 1$

أي :  $v_n u_n - u_n = -1 - v_n$

يعني :  $u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$

أي :  $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$  أي  $u_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 1}$

و بالتالي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$

3 أ

لدينا حسب السؤال 2 أ) :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$

يعني :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 1}$

أي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1} + 1}$

$$= 1 - \frac{2}{\left(\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} + 1\right)} = 1 - \frac{2}{\left(\frac{7u_n + 7}{3u_n + 4}\right)}$$

$$= 1 - \frac{2(3u_n + 4)}{7u_n + 7} = \frac{7u_n + 7 - 6u_n - 8}{7u_n + 7}$$

$$= \frac{(u_n - 1)}{7(u_n + 1)} = \frac{1}{7} v_n$$

و بالتالي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{7} v_n$

يعني :  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{7}$  .

إذن الحد العام  $v_n$  يكتب على الشكل التالي :

لدينا :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7}\right)^n$  : إذن  $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}$

3 ب

نلاحظ أن  $\left(\frac{1}{7}\right)^n$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{7}$  و هو عدد حقيقي موجب و أصغر من 1

إذن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$  و منه :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

يعني :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 0$

و لدينا حسب السؤال 2 أ) :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$

يعني :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + 1 = \frac{2}{1 - v_n}$

يعني :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{2}{1 - v_n} - 1$

و بالتالي :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1 - v_n} - 1\right) = \frac{2}{1 - 0} - 1 = 1$

يعني :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 1$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \quad \text{إذن :}$$

من أجل  $x = 0$  نحصل على :

$$f'(0) = 1 + \frac{2e^0}{(e^0 + 1)^2} = 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \quad \text{لدينا}$$

نعلم أن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0$

إذن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 2e^x > 0$  و  $(e^2 + 1)^2 > 0$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0 \quad \text{يعني :}$$

إذن  $f$  دالة تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$ .



نعلم أن معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(\mathcal{C})$  في النقطة  $x_0$  تُكتب على الشكل :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

إذن من أجل  $x_0 = 0$  نجد :  $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

يعني :  $(T) : y = f'(0) \cdot x + f(0)$

$$f'(0) = \frac{3}{2} \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

إذن المعادلة الديكارتية للمماس  $(T)$  تُصبح :  $(T) : y = \frac{3}{2}x$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} \right)$$

$$= \left( +\infty + 1 - \frac{2}{+\infty} \right) = (+\infty + 1 - 0) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} - (x + 1) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-2}{e^x + 1} \right) = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x + 1)} \right) \quad \text{و لدينا من جهة أخرى :}$$

$$= 1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty} = 1 + 0 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{إذن :}$$



الطريقة الثانية : استعمال تقنية الحدث المضاد .

إذا كان  $\bar{A}$  هو الحدث المضاد للحدث  $A$  فإن :  $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

نضع :  $A = \{ \text{الحصول على كرة واحدة على الأقل} \}$

إذن :  $\bar{A} = \{ \text{الحصول على ثلاث كرات من ألوان تخالف الأحمر} \}$

$$p \left( \begin{array}{c} \text{ثلاث كرات} \\ \text{تخالف اللون} \\ \text{الأحمر} \end{array} \right) = p \left( \begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right) + p \left( \begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left( \begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{بيضاويتين} \\ \text{أو الأخرى} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left( \begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{خضراويتين} \\ \text{أو الأخرى} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right)$$

$$= p \left( \begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right) + p \left( \begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left( \begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{بيضاويتين} \\ \text{و الأخرى} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left( \begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{خضراويتين} \\ \text{و الأخرى} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right)$$

$$= \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} + \frac{C_4^2 \times C_3^1}{220} + \frac{C_3^2 \times C_4^1}{220}$$

$$= \frac{4}{220} + \frac{1}{220} + \frac{18}{220} + \frac{12}{220} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

إذن :  $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

$$p(A) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{44 - 7}{44} = \frac{37}{44}$$

و بالتالي : احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل هو :  $\frac{37}{44}$

التمرين الخامس



ليكن  $x$  عنصراً من  $\mathbb{R}$ . لدينا :  $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

$$f(-x) = -x + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -x + \frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)}$$

$$= -x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = - \left( x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) = -f(x)$$

إذن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) = -f(x)$

و هذا يعني أن الدالة  $f$  دالة فردية وتمثيلها البياني متماثل بالنسبة للنقطة  $O$  أصل المعلم .



لدينا :  $x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} = x + \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{2}{e^x + 1}$

$$= x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = f(x)$$

إذن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$



لدينا :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

إذن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 - \left( \frac{2}{e^x + 1} \right)$

$$= 1 - \left( \frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2} \right) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

● **6 أ** ●

$$H'(x) = (x - \ln(e^x + 1))'$$

ليكن  $x$  عددا حقيقيا . لدينا :

$$= 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} = h(x)$$

إن  $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على  $\mathbb{R}$ .

● **6 ب** ●

$$\int_0^{\ln 2} \left( \frac{1}{e^x + 1} \right) dx = \int_0^{\ln 2} h(x) dx = [H(x)]_0^{\ln 2}$$

$$= [x - \ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2} = (\ln 2 - \ln 3) - (0 - \ln 2)$$

$$= 2 \ln 2 - \ln 3 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \left( \frac{4}{3} \right)$$

● **6 ج** ●

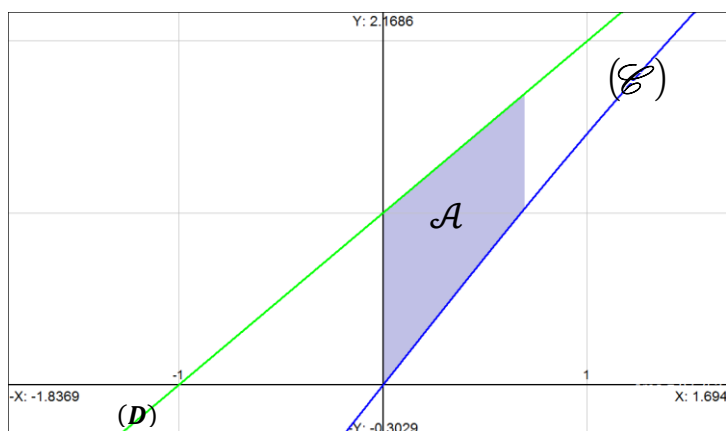
لتكن  $\mathcal{A}$  مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى  $(\mathcal{E})$  و المستقيم  $(D)$  والمستقيمين  $x = \ln 2$  و  $x = 0$  . لدينا :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} |f(x) - (x + 1)| dx = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{-2}{e^x + 1} \right| dx$$

$$= 2 \int_0^{\ln 2} \left( \frac{1}{e^x + 1} \right) dx = 2 \left( \ln \left( \frac{4}{3} \right) \right) \approx 0,57 \text{ unité}^2$$



صورة أخرى للمساحة  $\mathcal{A}$



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = 1 \end{cases}$$

لقد حصلنا لحد الآن على النهايات التالية :

إذن من هذه النهايات الثلاث نستنتج أن المستقيم  $(D) : y = x + 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{E})$  بجوار  $+\infty$ .

● **4 ج** ●

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{E})$  و المستقيم  $(D)$  ندرس إشارة الفرق  $f(x) - (x + 1)$

لدينا :

$$f(x) - (x + 1) = (x + 1) - \frac{2}{e^x + 1} - (x + 1)$$

$$= \frac{-2}{e^x + 1}$$



و نعلم أن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0$

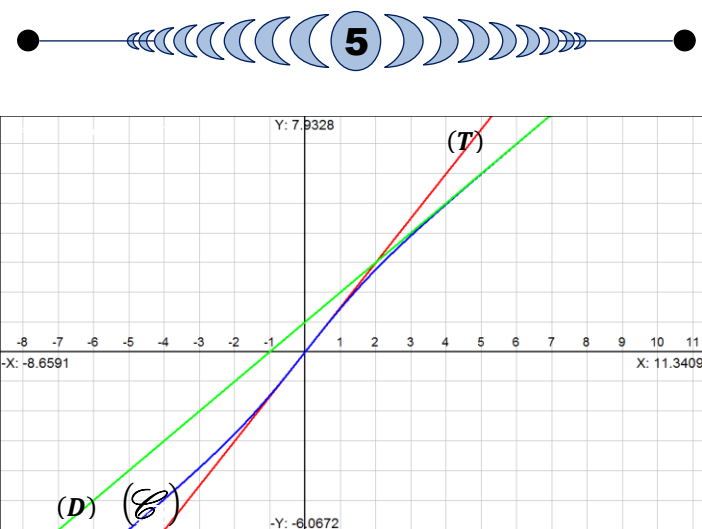
إذن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x + 1 > 0$

يعني :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{-2}{e^x + 1} < 0$

يعني :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) - (x + 1) < 0$

يعني :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) < (x + 1)$

و بالتالي : المستقيم  $(D)$  يوجد فوق المنحنى  $(\mathcal{E})$



المنحنى  $(\mathcal{E})$  لوحده

