أجوبة امتحان الدورة العادية 2013

التمرين الأول

1 أ

لدينا : $\begin{cases} A(-1;1;0) \\ B(1;0;1) \\ O(0;0;0) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{OA}(-1;1;0) \\ \overrightarrow{OB}(1;0;1) \end{cases}$

و منه : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستوى (OAB) .

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ متجهة منظمية على المستوى (OAB) .

إذن فهي عمودية على جميع متجهات المستوى (OAB)

إذن المتجهتان $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ متعامدتان

يعني ، باستعمال الجداء السلمي : $\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = 0$

أي : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ يعني : $x + y - z = 0$

و هذه الكتابة الأخيرة تميز نقط المستوى (OAB)

إذن فهي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) .

1 ب

لدينا $\Omega(1;1;-1)$ و $(OAB) : x + y - z = 0$

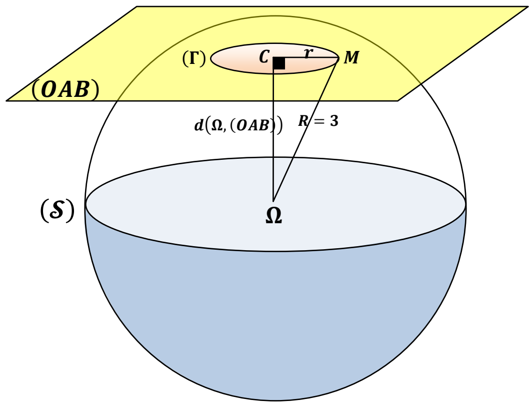
إذن : $d(\Omega,(OAB)) = \dfrac{|1+1-(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

و نعلم أن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها Ω و شعاعها $R = 3$.

نلاحظ إذن أن : $\sqrt{3} < 3$ يعني : $d(\Omega,(OAB)) < Rayon(\mathcal{S})$

إذن المستوى (OAB) يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) مركزها $C(\alpha;\beta;\gamma)$ و شعاعها r .

لتحديد قيمة الشعاع r نستعين بالشكل التالي :



من خلال هذا الشكل نلاحظ أن : $(\Omega C) \perp (OAB)$ إذن : $(\Omega C) \perp (CM)$

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة فيتاغورس في المثلث القائم الزاوية ΩCM في C

إذن : $\Omega M^2 = \Omega C^2 + CM^2$

يعني : $3^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + r^2$ يعني : $r = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$

2 أ

ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω و العمودي على المستوى (OAB) .

و لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) .

بما أن (Δ) عمودي على (OAB) و $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ منظمية على (OAB)

فإن أي متجهة موجهة لـ (Δ) تكون مستقيمية مع المتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

لدينا $\overrightarrow{\Omega M}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) .

إذن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ مستقيميتان .

يعني : $\overrightarrow{\Omega M} = t(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB})$; $(\exists t \epsilon \mathbb{R})$

أي : $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $(\exists t \epsilon \mathbb{R})$

يعني : $(\Delta) : \begin{cases} x - 1 = t \\ y - 1 = t \\ z + 1 = -t \end{cases}$; $(t \epsilon \mathbb{R})$

يعني : $\boxed{(\Delta) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t - 1 \end{cases} \ ; \ (t \epsilon \mathbb{R})}$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

2 ب

بما أن (Δ) مار من Ω و عمودي على (OAB) فإن (Δ) و (ΩC) منطبقان

يعني : $C(\alpha;\beta;\gamma) \ \epsilon \ (\Delta)$

و لدينا من جهة ثانية : $C(\alpha;\beta;\gamma) \ \epsilon \ (OAB)$

نحصل إذن على النظمة التالية : $\begin{cases} C(\alpha;\beta;\gamma) \ \epsilon \ (\Delta) \\ C(\alpha;\beta;\gamma) \ \epsilon \ (OAB) \end{cases}$

و نعلم أن : $\begin{cases} (\Delta) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t - 1 \end{cases} ; \ (t \epsilon \mathbb{R}) \\ (OAB) : x + y - z = 0 \end{cases}$

إذن نعوض x و y و z بالمجاهيل α و β و γ نجد : $\begin{cases} \alpha = 1 + t \\ \beta = 1 + t \\ \gamma = -1 - t \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$

نعوض بعد ذلك α و β و γ بالتعابير التي تضم البارامتر t في آخر معادلة

نجد : $(1+t) + (1+t) - (-1-t) = 0$

و نحل هذه المعادلة الظريفة من الدرجة الأولى بمجهول واحد نجد :

$3t + 3 = 0$ أي : $t = -1$

نعوض t بالقيمة -1 في تعابير α و β و γ نجد : $\begin{cases} \alpha = 1 - 1 = 0 \\ \beta = 1 - 1 = 0 \\ \gamma = -1 + 1 = 0 \end{cases}$

إذن النقطة C التي نبحث عنها ما هي إلا O أصل المعلم .

و بالتالي (Γ) دائرة مركزها O أصل المعلم .

التمرين الثاني

1 أ

$$(1+i)(-3+6i) = -3 + 6i - 3i - 6 = -9 + 3i$$

الهدف من هذه المتساوية هو توظيفها أثناء حساب $\dfrac{c-a}{b-a}$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{(-2+5i)-(7+2i)}{(4+8i)-(7+2i)} = \frac{-9+3i}{-3+6i}$$

$$= \frac{(1+i)(-3+6i)}{(-3+6i)} = (1+i)$$

1 ب

لدينا : $\frac{c-a}{b-a}=1+i$ إذن : $\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=|1+i|$

يعني : $\frac{|c-a|}{|b-a|}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

إذن : $|c-a|=\sqrt{2}\cdot|b-a|$

أي : $AC=\sqrt{2}\cdot AB$

من جهة ثانية ، لدينا : $\frac{c-a}{b-a}=1+i$

لنكتب العدد العقدي $(1+i)$ على الشكل المثلثي :

$$\begin{aligned}(1+i)&=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\&=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\end{aligned}$$

إذن : $\frac{c-a}{b-a}=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

و منه : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\arg\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\ [2\pi]$

يعني : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

أي : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

إذن $\frac{\pi}{4}$ قياس للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

2 أ

لدينا الدوران $\mathcal{R}$ معرف بما يلي : $\mathcal{R}_B\left(\frac{\pi}{2}\right):\ (\mathcal{P})\mapsto(\mathcal{P})$; $M(z)\mapsto M'(z')$

ننطلق من المعطى : $\mathcal{R}(A)=D$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$\left(aff(D)-aff(B)\right)=e^{\frac{i\pi}{2}}\left(aff(A)-aff(B)\right)$$

يعني : $(d-b)=e^{\frac{i\pi}{2}}(a-b)$

يعني : $d-4-8i=i(7+2i-4-8i)$

يعني : $d=7i-2-4i+8+4+8i$

أي : $d=10+11i$

2 ب

$$\frac{d-c}{b-c}=\frac{(10+11i)-(-2+5i)}{(4+8i)-(-2+5i)}=\frac{12+6i}{6+3i}=\frac{2(6+3i)}{(6+3i)}=2$$

إذن : $\frac{d-c}{b-c}=2$ و منه : $(d-c)=2(b-c)$

و باستعمال المتجهات نكتب : $\overrightarrow{CD}=2\,\overrightarrow{CB}$

إذن النقط C و B و D نقط مستقيمة .

يمكن أن نجيب بطريقة أخرى مبينة كما يلي :

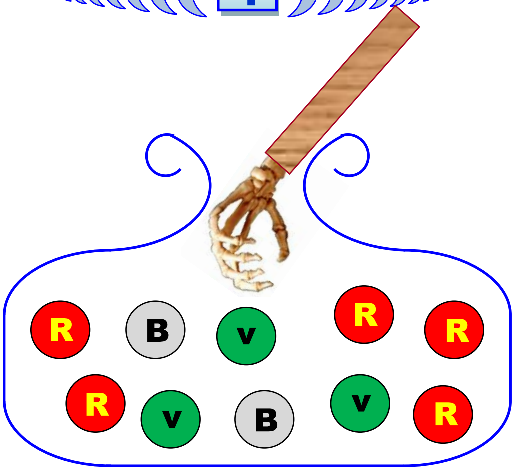
لدينا : $\frac{d-c}{b-c}=2$ إذن : $\arg\left(\frac{d-c}{b-c}\right)\equiv0\ [2\pi]$

يعني : $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)\equiv0[2\pi]$

إذن النقط C و B و D نقط مستقيمة .

التمرين الثالث

1



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات فإنه توجد C_{10}^4 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega)=C_{10}^4=210$

بحيث Ω هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية .

لدينا : $p(A)=p\begin{pmatrix}\text{كرتان}\\\text{حمراوين}\\\text{و كرتان}\\\text{خضراوين}\end{pmatrix}=\dfrac{card\begin{pmatrix}\text{كرتان}\\\text{حمراوين}\\\text{و كرتان}\\\text{خضراوين}\end{pmatrix}}{card(\Omega)}=\dfrac{C_5^2\times C_3^2}{210}=\dfrac{10\times3}{210}=\dfrac{1}{7}$

و لدينا كذلك : $p(B)=p\begin{pmatrix}\text{لا توجد أية}\\\text{كرة بيضاء}\\\text{مما سحبناه}\end{pmatrix}$

و نلاحظ أن : $\overline{\begin{pmatrix}\text{لا توجد أية}\\\text{كرة بيضاء}\\\text{مما سحبناه}\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}\text{توجد على الأقل}\\\text{كرة بيضاء من}\\\text{بين الكرات}\\\text{الأربع المسحوبة}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{كرة بيضاء}\\\text{و واحدة و ثلاث}\\\text{كرات غير ذلك}\end{pmatrix}\ \text{أو}\ \begin{pmatrix}\text{كرتان بيضاوين}\\\text{و كرتان تخالفان}\\\text{اللون الأبيض}\end{pmatrix}$

$$p\begin{pmatrix}\text{توجد على الأقل}\\\text{كرة بيضاء من}\\\text{بين الكرات}\\\text{الأربع المسحوبة}\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}\text{كرة بيضاء}\\\text{و واحدة و ثلاث}\\\text{كرات غير ذلك}\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}\text{كرتان بيضاوين}\\\text{و كرتان تخالفان}\\\text{اللون الأبيض}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{C_2^1\times C_8^3}{210}+\frac{C_2^2\times C_8^2}{210}=\frac{2\times56}{210}+\frac{28}{210}=\frac{2}{3}$$

و بالتالي : $p(B)=1-p(\bar{B})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

2 أ

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة (يعني سحب أربع كرات في آن واحد) بعدد الكرات المسحوبة .

يضم الصندوق كرتين بيضاوين و 8 كرات تخالف اللون الأبيض .

إذن عندما نسحب في آن واحد أربع كرات فإنه يُحتمل الحصول على كرات كلها تخالف الأبيض ، أو الحصول على كرة بيضاء واحدة و الباقي يخالف الأبيض ، أو الحصول على كرتين بيضاوين و كرتين غير ذلك .

إذن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي : 0 و 1 و 2

أو بتعبير أجمل : $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

2 ب

لدينا الحدث $[X=1]$ هو الحصول بالضبط على كرة بيضاء واحدة و ثلاث كرات مخالفة للون الأبيض .

إذن : $p[X=1] = \dfrac{C_2^1 \times C_8^3}{210} = \dfrac{2\times 56}{210} = \dfrac{8}{15}$

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X احتمال كل قيمة من قيم هذا المتغير العشوائي .

لدينا حسب السؤال 1) : $p(B) = \frac{1}{3}$ إذن : $p[X=0] = \frac{1}{3}$

يكفي الآن أن نحسب $p[X=2]$

الحدث $[X=2]$ هو الحصول بالضبط على كرتين بيضاوين و كرتين تخالفين الأبيض

إذن : $p[X=2] = \dfrac{C_2^2 \times C_8^2}{210} = \dfrac{28}{210} = \dfrac{2}{15}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$\begin{array}{l} P_X : \{0;1;2\} \longmapsto [0;1] \\ \quad 0 \longmapsto P_X(0) = \frac{1}{3} \\ \quad 1 \longmapsto P_X(1) = \frac{8}{15} \\ \quad 2 \longmapsto P_X(2) = \frac{2}{15} \end{array}$$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نتحقق من أن :

$$\boxed{P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) = 1}$$

التمرين الرابع

1

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. لدينا :

$$\begin{aligned} 5 - u_{n+1} &= 5 - \frac{25}{10-u_n} = \frac{50 - 5u_n - 25}{10 - u_n} \\ &= \frac{25 - 5u_n}{10-u_n} = \frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)} \end{aligned}$$

لنبين بالترجع صحة العبارة (P_n) المعرفة بما يلي :

$$\boxed{(P_n) : (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; 5 - u_n > 0}$$

لدينا : $5 - 0 > 0$ يعني : $5 - u_n > 0$

إذن العبارة (P_1) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;:\; 5 - u_n > 0$

إذن الكمية $(5-u_n)$ كمية موجبة قطعا .

و منه فإن الكميتان $5(5-u_n)$ و $5+(5-u_n)$ موجبتان قطعا .

إذن $\dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ كمية موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين قطعا

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; \dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)} > 0$

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; 5 - u_{n+1} > 0$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

نحصل إذن على ما يلي : $\begin{cases} (P_1) \; est \; vraie \\ (P_n) \; implique \; (P_{n+1}) \;;\; (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n) \; est \; toujours \; vraie$

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; 5 - u_n > 0$

2 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$. لدينا : $v_n = \dfrac{5}{5-u_n}$

إذن :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{5}{5-u_{n+1}} = 5 \times \left(\frac{1}{5-u_{n+1}}\right) \\ &= 5 \times \left(\frac{5+(5-u_n)}{5(5-u_n)}\right) = \frac{5+(5-u_n)}{(5-u_n)} = \frac{10-u_n}{5-u_n} \end{aligned}$$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; v_{n+1} = \dfrac{10-u_n}{5-u_n}$

و منه :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{10-u_n}{5-u_n} - \frac{5}{5-u_n} \\ &= \frac{10-u_n-5}{5-u_n} = \frac{5-u_n}{5-u_n} = 1 \end{aligned}$$

2 ب

بما أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; v_{n+1} - v_n = 1$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; v_{n+1} = v_n + 1$

فإن : $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ متتالية حسابية أساسها 1 .

إذن حدها العام v_n يكتب على الشكل :

$$(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; v_n = v_1 + (n-1)1$$

لدينا : $v_1 = \dfrac{5}{5-u_1} = \dfrac{5}{5-0} = 1$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; v_n = 1 + (n-1)1$

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; v_n = n$

و بما أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; v_n = \dfrac{5}{5-u_n}$

فإن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; n = \dfrac{5}{5-u_n}$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; 5n - nu_n = 5$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; nu_n = 5n - 5$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \;;\; u_n = 5 - \dfrac{5}{n}$

2 ج

$$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(5 - \frac{5}{n}\right) = 5 - \frac{5}{\infty} = 5 - 0 = 5$$

التمرين الخامس

1

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} (x-2)^2 e^x = (+\infty-2)^2 e^{+\infty} \\ &= (+\infty)e^{+\infty} = (+\infty)\times(+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^2 e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} (x-2)^2 \left(\frac{e^x}{x}\right) \\ &= (+\infty)^2 \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

نحصل إذن على النهايتين التاليتين : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$

و من هاتين النهايتين نستنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

2 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$f(x)=(x-2)^2e^x = (x^2-4x+4)e^x$$
$$= x^2e^x-4xe^x+4e^x$$

2 ب

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2e^x}_{\substack{x\to-\infty\\ 0^+}} - 4\underbrace{xe^x}_{\substack{x\to-\infty\\ 0^-}}+4\underbrace{e^x}_{\substack{x\to-\infty\\ 0^+}}=0$$

محور الأفاصيل مقارب أفقي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$

ملاحظة : $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ & si\ \ n\ est\ pair \\ 0^- & si\ \ n\ est\ impair \end{cases}$

3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $f(x)=(x-2)^2e^x$

إذن : $f'(x) = 2(x-2)e^x+(x-2)^2e^x$
$$= (x-2)e^x\big(2+(x-2)\big)$$
$$= (x-2)xe^x$$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$; $f'(x)=x(x-2)e^x$

3 ب

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$; $f'(x)=x(x-2)e^x$

نعلم أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$; $e^x>0$

إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارتي x و $(x-2)$

و يُبَيِّنُ الجدول التالي إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

إذن من خلال هذا الجدول نستنتج أن f تزايدية على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ و تناقصية على المجال $[0;2]$.

4 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $f'(x)=x(x-2)e^x$

إذن : $f''(x)=(x-2)e^x+xe^x+x(x-2)e^x$

ملاحظة : $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$

و بالتالي : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$; $f''(x)=(x^2-2)e^x$

و نعلم أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$; $e^x>0$

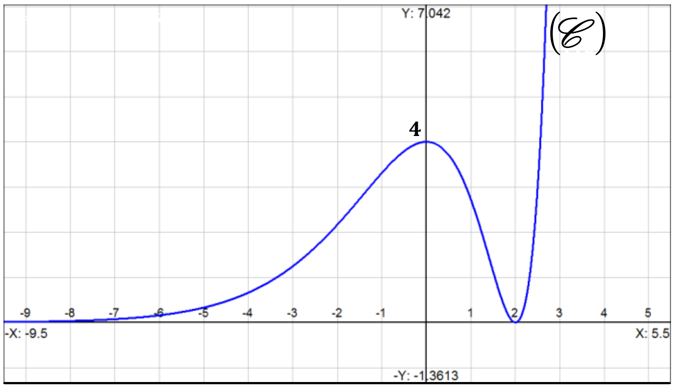
إذن إشارة $f''(x)$ تتعلق فقط بإشارة (x^2-2) و نلاحظ أن يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما هما حلا المعادلة $x^2-2=0$

يعني : $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$

أي : $x=-\sqrt{2}$ أو $x=\sqrt{2}$.

إذن المنحنى يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما هما $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$.

4 ب



5 أ

نعتبر الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $H(x)=(x-1)e^x$

نلاحظ أن H دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن تشكيلة منسجمة من الدوال المتصلة على $\mathbb{R}$.

و لدينا : $H'(x) = \big((x-2)e^x\big)'$
$$= e^x+(x-1)e^x = xe^x = h(x)$$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}dx = [uv]_0^1-\int_0^1 u'v\,dx = [xe^x]_0^1-[e^x]_0^1$$
$$= (e-0)-(e-1)=1$$

5 ب

نحسب التكامل التالي باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء .

$$\int_0^1 \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}dx = [x^2e^x]_0^1-\int_0^1 2xe^x\,dx$$
$$= [x^2e^x]_0^1-2\int_0^1 xe^x\,dx$$
$$= (e-0)-2\times1 = e-2$$

إذن : $\boxed{\int_0^1 x^2e^x\,dx = e-2}$

5 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الجزء من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ ومحور الأفاصيل و المستقيمين $x=0$ و $x=1$.

نحسب $\mathcal{A}$ باستعمال التكامل التالي : $\mathcal{A}=\int_0^1 |f(x)|\,dx$

نعلم أن الدالة f تناقصية على $[0;2]$.

إذن فهي تناقصية على المجال $[0;1]$.

إذا كان : $0\leq x\leq 1$ فإن : $f(0)\geq f(x)\geq f(1)$

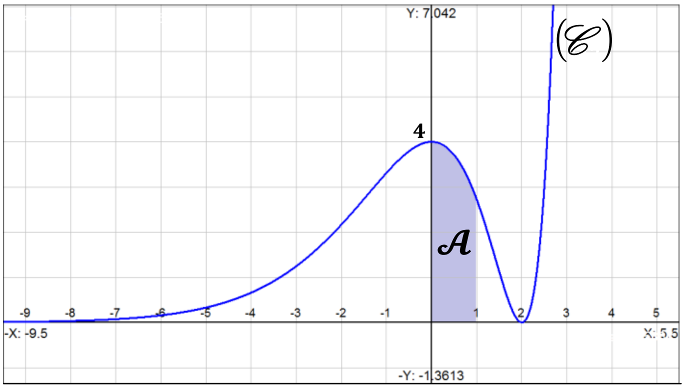
و منه : $4\geq f(x)\geq e\geq 0$

إذن : $f(x)$ كمية موجبة قطعا على المجال $[0;1]$.

و منه : $|f(x)|=f(x)$; $\forall x\epsilon[0;1]$

و بالرجوع إلى المساحة $\mathcal{A}$ نكتب :

$$\mathcal{A}=\int_0^1 |f(x)|\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1 (x^2e^x-4xe^x+4e^x)\,dx$$
$$=\int_0^1 x^2e^x\,dx-4\int_0^1 xe^x\,dx+4\int_0^1 e^x\,dx$$
$$=(e-2)-4\times 1+4[e^x]_0^1$$
$$=(e-2)-4+4(e-1)=5e-10$$
$$=5(e-2)\approx 3{,}59\ cm^2$$



6

المعادلة : $x^2=e^{-x}+4x-4$

تصبح : $x^2-4x+4=e^{-x}$

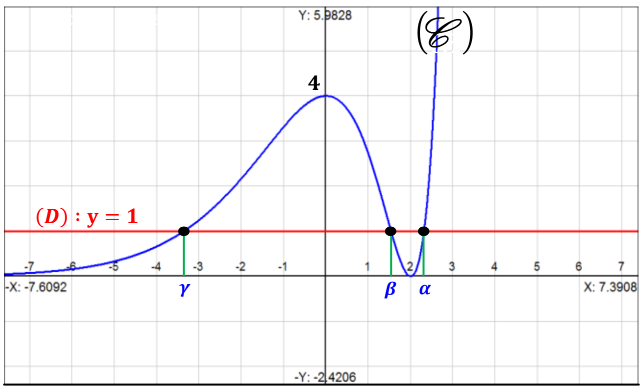
نضرب طرفي هذه المعادلة في الكمية الموجبة قطعا e^{-x} نجد :

$e^x(x^2-e^{-x}-4x+4)=0$

يعني : $x^2e^x-4xe^x+4e^x=1$ يعني : $f(x)=1$

إذن حلول هذه المعادلة الأخيرة هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) ذو المعادلة $(D):y=1$.

و هو ما يُبَينه الشكل التالي :



إذن : المعادلة تقبل ثلاثة حلول و هي α و β و γ .