

تصحيح التمرين الأول

(1)

✓ لدينا (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(1,-1,0)$ و شعاعها هو $\sqrt{3}$

إن معادلة ديكارتية للفلكة (S) تكتب على شكل : $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-0)^2 = (\sqrt{3})^2$

إن : $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$

إن : $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = 3$

ومنه : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ هي معادلة ديكارتية للفلكة (S)

✓ لدينا : $(0)^2 + (0)^2 + (1)^2 - 2(0) + 2(0) - 1 = 0 + 0 + 1 - 0 + 0 - 1 = 0$

إن : A تنتمي إلى (S)

(2) أ-

✓ لدينا : $\overrightarrow{AB}(1,1,0)$ و $\overrightarrow{AC}(2,1,1)$

إن :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (1)\vec{i} - (1)\vec{j} + (-1)\vec{k} \\ &= \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

✓ لدينا : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC)

إن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : للمستوى $x + (-1).y + (-1).z + d = 0$ (1)

أي : $x - y - z + d = 0$

و لدينا : $A(0,0,1) \in (ABC)$ إذن : $(0) - (0) - (1) + d = 0$ أي : $d = 1$

و بالتالي : $x - y - z + 1 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

ب-

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|(1) - (-1) - (0) + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \checkmark$$

✓ بما أن $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3} = R$ شعاع الفلكة (S) فإن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

و بما أن $A \in (ABC) \cap (S)$ فإن نقطة التماس هي A

(3) أ- لدينا $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) و $(\Delta) \perp (ABC)$

إن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$ موجهة للمستقيم (Δ)

و لدينا : $\Omega(1,-1,0) \in (\Delta)$

$$\begin{cases} x = (1) + t(1) = 1+t \\ y = (-1) + t(-1) = -1-t \\ z = (0) + t(-1) = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) : (\Delta) \text{ و منه تمثيل بارامترى للمستقيم}$$

ب- لنحدد متلوئي إحداثيات نقطتي تقاطع (Δ) و الفلكة (S)

$$M(x,y,z) \in (\Delta) \cap (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = -t \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = (\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

بعد التعويض نجد : $t^2 = 1$

$$\begin{cases} x = 1+(-1) = 0 \\ y = -1-(-1) = 0 \\ z = -(-1) = 1 \\ t = -1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = 1+1 = 2 \\ y = -1-1 = -2 \\ z = -1 \\ t = 1 \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

تصحيح التمرين الثاني

(1) لنحل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 - 8z + 25 = 0$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(25) = 64 - 100 = -36$$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z_1 = \frac{-(-8) - i\sqrt{36}}{2(1)} = \frac{8-6i}{2} = 4-3i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-(-8) + i\sqrt{36}}{2(1)} = \frac{8+6i}{2} = 4+3i$$

و منه : $S = \{4-3i, 4+3i\}$

(2) أ- لدينا $D(d)$ صورة $A(a)$ بالإزاحة T

$$d = a + z_{\overline{BC}} \quad \text{إذن :}$$

$$d = a + c - b \quad \text{إذن :}$$

$$d = (4+3i) + (10+3i) - (4-3i) \quad \text{إذن :}$$

$$d = 10+9i \quad \text{ومنه :}$$

ب-

$$\frac{b-a}{d-a} = \frac{(4-3i)-(4+3i)}{(10+9i)-(4+3i)} = \frac{-6i}{6+6i} = \frac{-i}{1+i} = \frac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{1}{2}(1+i) \quad \checkmark \text{ لدينا}$$

✓

$$\left| -\frac{1}{2}(1+i) \right| = \left| \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \bullet$$

الشكل الممّثي : \bullet

$$\frac{-1}{2}(1+i) = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right)$$

-ج

$$\begin{aligned} \left(\overline{AD}, \overline{AB} \right) &\equiv \arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right)[2\pi] \\ &\equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi] \end{aligned}$$

تصحيح التمرين الثالث

(1) ليكن $n \in \mathbb{N}$
لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1 \\ &= \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5}(u_n - 1) \end{aligned}$$

إذن : $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$ لكل n من \mathbb{N}

(2) أ-

✓ من أجل $n = 0$

لدينا $u_0 = 2$

إذن : $u_0 > 1$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

• نفترض أن $u_n > 1$

• و نبين أن : $u_{n+1} > 1$ ؟

لدينا حسب نتيجة السؤال (1) : $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$

و حسب الافتراض لدينا $u_n > 1$ إذن $u_n - 1 > 0$ إذن $\frac{1}{5}(u_n - 1) > 0$

إذن $u_{n+1} - 1 > 0$ و منه $u_{n+1} > 1$

✓ نستنتج أن : $u_n > 1$ لكل n من \mathbb{N}

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n = \left(\frac{1}{5} - 1\right)u_n + \frac{4}{5} = \frac{-4}{5}u_n + \frac{4}{5} = \frac{-4}{5}(u_n - 1)$$

لدينا : $u_n - 1 > 0$

$$\frac{-4}{5}(u_n - 1) < 0 \quad \text{إذن}$$

و منه $u_{n+1} - u_n < 0$ لكل n من \mathbb{N}

و بالتالي : المتتالية (u_n) تناقصية

ج- بما أن (u_n) تناقصية و مصغرة (بالعدد 1) فإن (u_n) متقاربة

(3) أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\checkmark \text{ لدينا باستعمال نتيجة السؤال (1) : } v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1) = \frac{1}{5}v_n$$

$$\text{إذن لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

\checkmark لنكتب v_n بدلالة n

$$\text{لدينا : } v_n = v_0 \times q^n$$

$$\text{إذن : } v_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\text{و منه : } v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

ب-

\checkmark ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\text{لدينا } u_n - 1 = v_n$$

$$\text{إذن } u_n = v_n + 1$$

$$\text{و منه } u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$\checkmark \text{ بما أن } -1 < \frac{1}{5} < 1 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$$

$$\text{إذن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

تصحيح التمرين الرابع

التجربة " سحب في آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

$$\text{card } \Omega = C_9^3 = 84 \text{ لدينا}$$

(1) A : " الحصول على ثلاث بيدقات من نفس اللون "

$$\boxed{B}, \boxed{B}, \boxed{B} \quad \text{أو} \quad \boxed{N}, \boxed{N}, \boxed{N}$$

$$\text{card}A = C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 = 5$$

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card } \Omega} = \frac{5}{84}$$

B : " الحصول على ثلاث بيدقات مختلفة اللون مثلى مثلى "

$$\boxed{B}, \boxed{N}, \boxed{V}$$

$$\text{card}B = C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card } \Omega} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

(2) أ-

$$\boxed{\overline{N}}, \boxed{\overline{N}}, \boxed{\overline{N}} \rightarrow X = 0$$

$$\boxed{N}, \boxed{\overline{N}}, \boxed{\overline{N}} \rightarrow X = 1$$

$$\boxed{N}, \boxed{N}, \boxed{\overline{N}} \rightarrow X = 2$$

$$\boxed{N}, \boxed{N}, \boxed{N} \rightarrow X = 3$$

$$p(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_6^1}{84} = \frac{3 \times 6}{84} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$$

ب-

$$p(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_6^2}{84} = \frac{3 \times 15}{84} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

ج- لنحدد قانون احتمال X :

$$p(X = 0) = \frac{C_6^3}{84} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$$

$$p(X = 1) = \frac{15}{28}$$

$$p(X = 2) = \frac{3}{14}$$

$$p(X = 3) = \frac{C_3^3}{84} = \frac{1}{84}$$

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

تصحيح التمرين الخامس

■I

(1) أ- ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$(2x+1)(x-1) = 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 - x - 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\mathbb{R} \text{ من } x \text{ لكل } 2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) \text{ : إذن}$$

-ب

✓ ليكن $x \in]0, +\infty[$:

$$g'(x) = (x^2 - x - \ln x)' = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x} \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{إذن : } g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x} \text{ لكل } x \text{ من }]0, +\infty[$$

$$\text{✓ لدينا : } 2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) \text{ إذن } g'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$$

$$\text{ولدينا } x > 0 \text{ : إذن : } \frac{2x+1}{x} > 0 \text{ و منه إشارة } g'(x) \text{ هي إشارة } x-1$$

x	0	$1+\infty$
$x-1$	-	+

• على المجال $]0, 1[$: لدينا $g'(x) \leq 0$ إذن g تناقصية

• على المجال $[1, +\infty[$: لدينا $g'(x) \geq 0$ إذن g تزايدية

(2) لدينا g تناقصية على $]0, 1[$ و تزايدية على $[1, +\infty[$

إذن $g(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة g على $]0, +\infty[$

$$\text{إذن : } (\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) \geq g(1)$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) \geq 0$$

■II

$$(1) \text{ أ- } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 - (\ln x)^2 = -\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -(\ln x)^2 = -\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

-ب

✓

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 - (\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln(x))^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \right) = +\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array} \right. \quad : \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \right) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array} \right. \quad : \text{ لأن}$$

ج- لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ إذن (C) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتايب بجوار $+\infty$

(2) أ-

ليكن $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - 1 - (\ln x)^2)' \\ &= 2x - 0 - 2 \ln'(x) \cdot \ln(x) \\ &= 2x - \frac{2 \ln x}{x} \\ &= \frac{2x^2 - 2 \ln x}{x} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{x^2 - \ln x}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\text{إذن: }]0, +\infty[\text{ لكل } x \text{ من } f'(x) = 2 \left(\frac{x^2 - \ln x}{x} \right)$$

ب- ليكن $x \in]0, +\infty[$

$$\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - x - \ln x}{x} + 1 = \frac{x^2 - x - \ln x + x}{x} = \frac{x^2 - \ln x}{x} \quad \checkmark$$

$$\text{إذن: }]0, +\infty[\text{ لكل } x \text{ من } \frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x}$$

$$f'(x) = 2 \left(\frac{x^2 - \ln x}{x} \right) \quad \checkmark \text{ لدينا}$$

$$f'(x) = 2 \left(\frac{g(x)}{x} + 1 \right) \quad \text{إذن}$$

و لدينا حسب الجزء الأول (2) : $g(x) \geq 0$ و لدينا $x > 0$

$$\text{إذن : } f'(x) = 2 \left(\frac{g(x)}{x} + 1 \right) > 0 \quad \text{لكل } x \text{ من }]0, +\infty[$$

و منه الدالة f تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

(3) أ- معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1,0)$

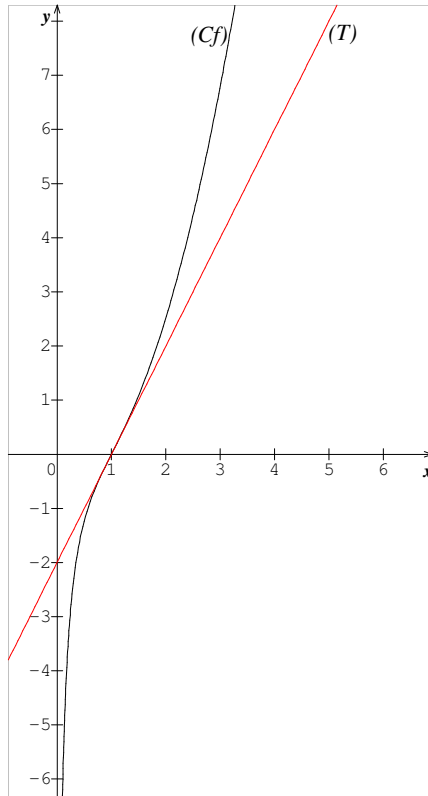
$$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$$

$$\text{لدينا } f(1) = 0 \text{ و } f'(1) = 2 \left(\frac{g(1)}{1} + 1 \right) = 2$$

$$\text{إذن : } y = 2 \cdot (x - 1) + 0$$

و منه : $y = 2x - 2$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1,0)$

-ب-



(4) أ-

✓ الدالة $H : x \mapsto x (\ln x - 1)$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

✓ ليكن $x \in]0, +\infty[$

$$H'(x) = (x (\ln x - 1))' = (x)' \cdot (\ln(x) - 1) + x \cdot (\ln(x) - 1)' = 1 \cdot (\ln(x) - 1) + x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x)$$

إذن $H'(x) = h(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$

و بالتالي : $H : x \mapsto x (\ln x - 1)$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \ln x$ على $]0, +\infty[$

$$\int_1^e \ln(x) dx = [x (\ln(x) - 1)]_1^e = (e \cdot (\ln(e) - 1)) - (1 \cdot (\ln(1) - 1)) = 1 \quad \bullet$$

ب-

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad \swarrow \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad \swarrow \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2 dx &= [x (\ln(x))^2]_1^e - \int_1^e 2 \cdot \frac{x \cdot \ln x}{x} \\ &= (e - 0) - 2 \int_1^e \ln x dx \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = e$ و $x = 1$

$$A = \int_1^e |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

على المجال $[1, e] : f(x) \geq 0$

$$A = \int_1^e f(x) dx \times 1cm \times 1cm$$

$$A = \int_1^e (x^2 - 1 - (\ln(x))^2) dx \cdot cm^2$$

$$A = \left(\int_1^e (x^2 - 1) dx - \int_1^e (\ln x)^2 dx \right) \cdot cm^2$$

$$A = \left(\left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^e - \int_1^e (\ln x)^2 dx \right) \cdot cm^2$$

$$A = \left(\left(\frac{e^3}{3} - e \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - (e - 2) \right) \cdot cm^2$$

و بالتالي : مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و محور الأفاصل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = e$ و $x = 1$

$$\text{هي } \frac{1}{3}(e^3 - 6e + 8) \text{ cm}^2$$

つづく