

## حل التمرين 1

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

لدينا:  $A(0; 0; 1)$  و  $P: 2x + y - 2z - 7 = 0$

و  $S: S(\Omega; 3)$  حيث  $\Omega(0; 3; -2)$

$$(1) \text{ أ- أبين أن: } \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ تمثيل بارامتري}$$

للمستقيم  $(\Delta)$  المار من  $A$  والعمودي على  $(P)$ .

لدينا:  $2x + y - 2z - 7 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى  $(P)$ ,

إذن فالمتجهة التي مثلثت إحداثياتها  $(2; 1; -2)$  هي متجهة

منظمة على  $(P)$  وبالتالي فهي متجهة موجهة للمستقيم  $(\Delta)$

العمودي على  $(P)$  والمار من النقطة  $A(0; 0; 1)$ .

ومنه فالتمثيل البارامتري للمستقيم  $(\Delta)$  هو:

$$(\Delta): \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ يعني أن:}$$

ب- أتتحقق من أن  $H(2; 1; -1)$  هي نقطة تقاطع المستوى  $(P)$

والمستقيم  $(\Delta)$ .

بما أن  $(\Delta)$  عمودي على  $(P)$  فإن  $(\Delta)$  يخترق المستوى  $(P)$  في

نقطة  $H$  أتأكد أن مثلثت إحداثياتها هو  $(2; 1; -1)$ :

ولدينا:  $2 \times (2) + (1) - 2 \times (-1) - 7 = 7 - 7 = 0$

إذن  $H \in (P)$

ومن أجل  $t = 1$  في التمثيل البارامتري للمستقيم  $(\Delta)$  أجد:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \text{ وهي إحداثيات النقطة } H.$$

إذن  $H(2; 1; -1)$  هي نقطة تقاطع المستوى  $(P)$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

$$(2) \text{ أ- أبين أن: } \overline{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$\text{حيث } \vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

لدينا:  $A(0; 0; 1)$  و  $\Omega(0; 3; -2)$  إذن:  $\overline{\Omega A}(0; -3; 3)$

وبما أن:  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$  فإن:

$$\overline{\Omega A} \wedge \vec{u} = (0\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}) \wedge (2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$$

$$= (-3\vec{j} + 3\vec{k}) \wedge (2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$$

$$= 3(-\vec{j} + \vec{k}) \wedge (2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$$

$$= 3[-2\vec{j} \wedge \vec{i} - \vec{j} \wedge \vec{j} + 2\vec{j} \wedge \vec{k} + 2\vec{k} \wedge \vec{i} + \vec{k} \wedge \vec{j} - 2\vec{k} \wedge \vec{k}]$$

$$= 3[2\vec{k} - \vec{0} + 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{i} - \vec{0}]$$

$$\text{إذن: } \overline{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

ب- أبين أن مسافة النقطة  $\Omega$  عن  $(\Delta)$  تساوي 3.

لدينا:  $\Omega(0; 3; -2)$  و  $A(0; 0; 1)$  تنتمي إلى  $(\Delta)$

و  $\vec{u}(2; 1; -2)$  متجهة موجهة لـ  $(\Delta)$

$$\text{إذن: } d(\Omega; (\Delta)) = \frac{|\overline{\Omega A} \wedge \vec{u}|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})|}{\|2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\|}$$

$$= \frac{3\|\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\|}{\|2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\|} = 3 \frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}}$$

$$= 3$$

ج- أستنتج أن المستقيم  $(\Delta)$  مماس للفلكرة  $(S)$  وأتتحقق أن  $H$

هي نقطة تماس المستقيم  $(\Delta)$  والفلكرة  $(S)$ .

لدينا حسب نتيجة السؤال السابق: مسافة  $\Omega$  مركز الفلكرة

$(S)$  عن المستقيم  $(\Delta)$  تساوي 3 الذي هو شعاع الفلكرة، إذن

المستقيم  $(\Delta)$  مماس للفلكرة  $(S)$ .

نعلم أن النقطة  $H(2; 1; -1)$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

$$\text{ولدينا: } \overline{\Omega H}(2; -2; 1) \text{ و } \overline{\Omega H} = \|\overline{\Omega H}\|$$

$$= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

بما أن  $H$  تبعد عن  $\Omega$  مركز الفلكة بالمسافة 3 التي تساوي شعاع الفلكة فإن  $H \in (S)$  وبالتالي فالنقطة  $H$  هي نقطة تماس الفلكة  $(S)$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

### حل التمرين 2

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  هي المتتالية بحيث:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} \text{ و } u_1 = 5$$

(1) أبين بالترجع أن:  $u_n > 2$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$

• من أجل  $n = 1$  لدينا:  $u_1 = 5 > 2$  إذن الخاصية صحيحة من أجل الحد الأول.

• نفترض أن:  $u_n > 2$  من أجل  $n \geq 1$  ولنبين أنها صحيحة من أجل  $n + 1$ :

لدينا:

$$u_{n+1} - 2 = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} - 2 = \frac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1 + u_n} = \frac{3u_n - 6}{1 + u_n} = \frac{3(u_n - 2)}{1 + u_n}$$

وبما أن  $u_n > 2$  حسب افتراض التراجع فإن  $u_n > 0$  و  $u_n - 2 > 0$

$$\text{وبالتالي } 1 + u_n > 0 \text{ و } u_{n+1} - 2 = \frac{3(u_n - 2)}{1 + u_n} > 0 \text{ يعني أن: } u_{n+1} > 2$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n + 1$

وبالتالي:  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n > 2$

(2) لدينا  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المتتالية المعرفة كما يلي:  $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$

أبين أن  $v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  ثم أبين أن المتتالية

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  حسابية أساسها 1.

• لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{3}{u_{n+1} - 2} = \frac{3}{\frac{5u_n - 4}{1 + u_n} - 2} = \frac{3}{\frac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1 + u_n}} = \frac{3}{\frac{3u_n - 6}{1 + u_n}} = \frac{3(1 + u_n)}{3u_n - 6} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$$

إذن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{3}{\frac{3u_n - 6}{1 + u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{3(1 + u_n)}{3(u_n - 2)} \text{ يعني أن:}$$

$$\text{يعني أن: } v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

• لدينا لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$ :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1 + u_n}{u_n - 2} - \frac{3}{u_n - 2} = \frac{1 + u_n - 3}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2}{u_n - 2} = 1 \quad (u_n \neq 2)$$

إذن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متتالية حسابية أساسها 1.

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  وأستنتج أن:  $u_n = 2 + \frac{3}{n}$  لكل

$n$  من  $\mathbb{N}^*$

• لدينا:  $v_1 = \frac{3}{u_1 - 2} = \frac{3}{5 - 2} = 1$  إذن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متتالية

حسابية حدها الأول  $v_1 = 1$  وأساسها  $r = 1$  إذن حسب

صيغة الحد العام لمتتالية حسابية: لدينا

$$v_n = v_1 + (n - 1)r : \mathbb{N}^* \text{ لكل } n$$

$$\text{يعني } v_n = 1 + (n - 1) \times 1$$

$$\text{إذن: لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* : v_n = n$$

• نعلم أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$ :  $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$  يعني  $u_n - 2 = \frac{3}{v_n}$

$$\text{إذن: } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \frac{3}{v_n} + 2$$

$$\text{يعني أن: } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \frac{3}{n} + 2$$

ج- أحدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ :

لدينا:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$  وبما أن  $u_n = \frac{3}{n} + 2$   $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

فإن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

ب- أبن أن:  $p(X=0) = \frac{28}{45}$  ثم أعطي قانون احتمال  $X$ .  
 الحدث  $(X=0)$  يعني أن البطاقتين المسحوبتين هي لمادة الرياضيات،

إذن:  $\text{card}(X=0) = A_8^2 = 56$  وبالتالي:

$$p(X=0) = \frac{\text{card}(X=0)}{\text{card } \Omega} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$$

قانون احتمال  $X$ :

لدينا:  $(X=1)$  هو الحدث  $B$  (سحب بطاقتين مختلفتي المادة) و  $(X=2)$  هو الحدث  $A$  (سحب بطاقتين للغة الفرنسية) وبالتالي فقانون احتمال  $X$  هو:

$X(\Omega)$	0	1	2
$p(X=x_i)$	$p(X=0) = \frac{28}{45}$	$p(X=1) = \frac{16}{45}$	$p(X=2) = \frac{1}{45}$

### حل التمرين 4

(1) أحل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة:  $z^2 - 4z + 5 = 0$

مميز هذه المعادلة هو:  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 \times 1 = 16 - 20 = -4$

إذن:  $\Delta = (2i)^2$

وحلي المعادلة هما:  $z_1 = \frac{4-2i}{2}$  و  $z_2 = \frac{4+2i}{2}$

أي:  $z_1 = 2-i$  و  $z_2 = 2+i$

إذن مجموعة الحلول هي:  $S = \{2-i; 2+i\}$

(2) في المستوى العقدي النسوب إلى المعلم المتعامد المنظم المباشر

$$(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$$

لدينا:  $A(a=2+i)$  و  $B(b=2-i)$  و  $C(c=i)$  و  $D(d=-i)$

$$\Omega(\omega=1)$$

أ- أبن أن:  $\frac{a-\omega}{b-\omega} = i$

لدينا:  $\frac{a-\omega}{b-\omega} = \frac{2+i-1}{2-i-1} = \frac{1+i}{1-i}$

$$= \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i+1}{1+1} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

### حل التمرين 3

التجربة العشوائية تقتضي السحب بالتتابع وبدون إحلال لبطاقتين من صندوق يحتوي على 10 بطاقات.

(1)  $A$  هو الحدث: «سحب بطاقتين تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية»

$B$  هو الحدث: «سحب بطاقتين تتعلقان بمادتين مختلفتين»

حيث عدد بطاقات الرياضيات هو 8 وعدد بطاقات الفرنسية هو 2.

أبن أن:  $p(A) = \frac{1}{45}$  و  $p(B) = \frac{16}{45}$

- بما أننا في حالة فرضية تساوي الاحتمالات فإن:

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

التجربة العشوائية و  $\text{card } \Omega = A_{10}^2 = 90$

وبما أن  $A$  هو الحدث: سحب بطاقتين للغة الفرنسية من أصل

بطاقتين فإن:  $\text{card } A = A_2^2 = 2$

وبالتالي لدينا:  $p(A) = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$

كذلك لدينا:  $p(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \frac{2 \times A_2^1 \times A_8^1}{90}$

$$= \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$$

(لأن عدد إمكانيات  $B$  هو  $A_2^1 \times A_8^1$  مع أخذ بالاعتبار ترتيب

البطاقتين أي الضرب في الذي هو عدد المواقع في الترتيب).

(2)  $X$  هو المتغير العشوائي الذي يعطي عدد بطاقات اللغة الفرنسية.

أ- أتحقق أن القيم التي يأخذها  $X$  هي: 0 و 1 و 2.

بما أننا نسحب بطاقتين من الصندوق وعدد بطاقات الفرنسية

بداخله هو 2 فإن إمكانيات سحب بطاقة للغة الفرنسية هي:

- البطاقتين المسحوبتين هما للرياضيات: في هذه الحالة  $X$

يأخذ القيمة 0.

- البطاقتين مكونتين من واحدة مادة الرياضيات والأخرى

لمادة الفرنسية وفي هذه الحالة  $X$  يأخذ القيمة 1.

- البطاقتين المسحوبتين هما للغة الفرنسية وهنا  $X$  يأخذ

القيمة 2.

وبالتالي فالقيم الممكنة للمتغير العشوائي  $X$  هي: 0 و 1 و 2

أي:  $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

• ولدنا كذلك :

$$\begin{aligned} id + 1 - i &= i(-i) + 1 - i \\ &= 1 + 1 - i \\ &= 2 - i = b \end{aligned}$$

وهذا يعني أن:  $R(D) = B$

ج- أبن أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  تنتمي إلى نفس الدائرة،  
أحدد مركزها:

حسب النتيجة ب - لدينا:  $R(A) = C$  إذن:  $\Omega A = \Omega C$

و  $R(D) = B$  إذن:  $\Omega D = \Omega B$

وحسب النتيجة (2) ب - لدينا:  $\Omega A = \Omega B$ ، نستنتج إذن أن:  
 $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$  وهذا يعني أن النقط  $A$  و  $C$  و  $D$  و  $B$   
و  $D$  تنتمي إلى الدائرة التي مركزها  $\Omega$ .

### حل التمرين 5

لدينا  $f(x) = (xe^x - 1)e^x$  على  $\mathbb{R}$  كمايلي:  $f(x) = (xe^x - 1)e^x$   
(C) منحناها في معلم متعامد بمنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة 2cm)

(1) أبن أن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  وأول النتيجة هندسياً.  
• أعلم أن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\text{إذن:} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \times 0 = 0$$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  يعني أن المنحنى (C) يقبل المستقيم ذي المعادلة:

$$y = 0 \quad \text{كمقارب أفقي بجوار } -\infty.$$

(يعني أن محور الأفاصيل هو مقارب أفقي للمنحنى (C)  
بجوار  $-\infty$ )

$$(2) \text{ أبن أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$$\text{لدينا:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - 1)e^x = +\infty$$

$$\text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - 1) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{إذن:} \quad \frac{a - \omega}{b - \omega} = i$$

ب- أستنتج أن المثلث  $\Omega AB$  قائم الزاوية ومتساوي الساقين  
في  $\Omega$ .

لدينا:  $\Omega A: |a - \omega|$  و  $\Omega B: |b - \omega|$

$$\text{وبما أن:} \quad \frac{a - \omega}{b - \omega} = i \quad \text{فإن:} \quad \frac{|a - \omega|}{|b - \omega|} = |i| = 1$$

$$\text{إذن:} \quad |a - \omega| = |b - \omega| \quad \text{أي أن:} \quad \Omega A = \Omega B \quad (1)$$

من جهة أخرى نعلم أن:

$$\overline{(\overline{\Omega B}; \overline{\Omega A})} = \arg\left(\frac{a - \omega}{b - \omega}\right) [2\pi]$$

$$= \arg(i) [2\pi]$$

$$= \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

أي أن الزاوية  $[\widehat{A\Omega B}]$  قائمة (2).

من النتيجة (1) و (2) نستنتج أن:  $\Omega AB$  مثلث قائم الزاوية  
ومتساوي الساقين في  $\Omega$ .

(3) لدينا:  $M(z)$  و  $M'(z')$  حيث  $M'(z') = M'$  و  $R(M)$  هو الدوران

الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\text{أ- أبن أن:} \quad z' = iz + 1 - i$$

أعلم أنه حسب الصيغة العقدية للدوران  $R$  لدينا:

$$z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$$

$$\text{وبما أن:} \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad \text{فإن:} \quad z' - 1 = iz - i$$

$$\text{وبالتالي:} \quad z' = iz + 1 - i$$

ب- أتحقق أن:  $R(A) = C$  و  $R(D) = B$

• حسب السؤال أ- لدينا:  $z' = iz + 1 - i$

هي الصيغة العقدية للدوران  $R$  إذن:

$$ia + 1 - i = i(2 + i) + 1 - i$$

$$= 2i - \mathcal{X} + \mathcal{X} - i$$

$$= i = c$$

وهذا يعني أن:  $R(A) = C$

ج- أبن أن الدالة  $f$  تزايدية على  $[0; +\infty[$  وتناقصية على  $]-\infty; 0]$  ثم أضع جدول تغيرات الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

• لدينا:  $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = e^x (e^x - 1 + 2x e^x)$   
 وحسب السؤال السابق لدينا: لكل  $x$  من  $[0; +\infty[$ :  
 $f'(x) \geq 0$  و  $e^x > 0$  و  $e^x - 1 \geq 0$  إذن  $2x e^x \geq 0$   
 وهذا يعني أن  $f$  تزايدية على  $[0; +\infty[$ .  
 - ولكل  $x$  من  $]-\infty; 0]$  لدينا:  $e^x > 0$  و  $x e^x \leq 0$   
 و  $e^x - 1 \leq 0$

إذن:  $f'(x) \leq 0$  و  $e^x > 0$  أي أن  $f'(x) \leq 0$   
 وهذا يعني أن  $f$  تناقصية على المجال  $]-\infty; 0]$ .  
 • جدول التغيرات على  $\mathbb{R}$ :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$0$	$-1$	$+\infty$

4 أ- أبن أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في  $[0; +\infty[$   
 وأن  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

• أعلم أن الدالة:  $x \mapsto e^x$  متصلة على  $[0; +\infty[$  والدالة  
 $x \mapsto x e^x$  متصلة على  $[0; +\infty[$  إذن دالة الجداء:  $x \mapsto x e^x$   
 متصلة على  $[0; +\infty[$  وبالتالي الدالة:  $x \mapsto x e^x - 1$  متصلة  
 على  $[0; +\infty[$  إذن الدالة  $f: x \mapsto (x e^x - 1) e^x$  متصلة على  
 $[0; +\infty[$ .

وحسب نتيجة السؤال السابق لدينا،  $f$  تزايدية قطعاً على  
 $[0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0]$  (لأن  $f' \geq 0$  و  $f' \leq 0$ ).  
 تنعدم في نقطة واحدة هي  $0$  على  $[0; +\infty[$ .  
 وبما أن  $0 \in ]-1; +\infty[$  فإن  $0$  يقبل سابقاً وحيداً  $\alpha$  بالدالة  $f$   
 في المجال  $[0; +\infty[$  أي أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً  
 وحيداً  $\alpha$  في  $[0; +\infty[$ .

• أبن أن  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$  لدينا:  $f(1) = (e - 1) e > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( e^x - \frac{1}{x} \right) e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^x - \frac{1}{x} \right) e^x$$

وبما أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$  فإن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$   
 ب- أستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجماً بجوار  $+\infty$  أحده.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ أ- لدينا حسب نتيجة (2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ و}$$

إذن المنحنى (C) يقبل محور الأرتيب كاتجاه مقارب بجوار  $+\infty$ .  
 3 أ- أبن أن:  $f'(x) = e^x (e^x - 1 + 2x e^x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$   
 ثم أتتحقق أن:  $f'(0) = 0$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (جاء دالتين قابلتين  
 للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ )  
 ولدنا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = (x e^x - 1)' e^x + (x e^x - 1) (e^x)'$$

$$= (x e^x)' e^x + (x e^x - 1) e^x$$

$$= (e^x + x e^x) e^x + (x e^x - 1) e^x$$

$$= e^x [e^x + x e^x + x e^x - 1]$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = e^x (e^x - 1 + 2x e^x)$$

لدينا:  $f'(0) = e^0 (e^0 - 1 + 2 \times 0 \times e^0) = 1 \times (1 - 1) = 0$

ب- أبن أن:  $e^x - 1 \geq 0 ; \forall x \in [0; +\infty[$   
 و  $e^x - 1 \leq 0 ; \forall x \in ]-\infty; 0]$

أعلم أن الدالة  $x \mapsto e^x$  تزايدية على  $\mathbb{R}$ ، إذن:  
 • لكل  $x \geq 0$  لدينا:  $e^x \geq e^0$  يعني  $e^x \geq 1$  يعني  $e^x - 1 \geq 0$   
 وبالتالي:  $e^x - 1 \geq 0$  لكل  $x \in [0; +\infty[$ .  
 • لكل  $x \leq 0$  لدينا:  $e^x \leq e^0$  يعني  $e^x \leq 1$  يعني  $e^x - 1 \leq 0$   
 وبالتالي:  $e^x - 1 \leq 0$  لكل  $x \in ]-\infty; 0]$ .

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} u'(x) v(x) dx \quad \text{ومنه:}$$

$$= \left[ u(x) v(x) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} u(x) v'(x) dx$$

$$= \left[ x \times \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} e - \frac{1}{4} (e - 1) = \frac{1}{4} e - \frac{1}{4} e + \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx = \frac{1}{4} \quad \text{إذن:}$$

6) أحسب بمساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = \frac{1}{2}$  و  $x = 0$

لتكن A مساحة الحيز المطلوب، لدينا:

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx \times (\text{الوحدة})$$

$$\left( \forall x \in \left[ 0; \frac{1}{2} \right] \right); f(x) \leq 0$$

$$\text{إذن: } |f(x)| = -f(x)$$

$$A = - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \times 4 \text{ cm}^2 \quad \text{وبالتالي:}$$

$$= - \int_0^{\frac{1}{2}} (x e^{2x} - 1) dx \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \left( - \int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \left( - \frac{1}{4} + \left[ e^x \right]_0^{\frac{1}{2}} \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \left( - \frac{1}{4} + \sqrt{e} - 1 \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= (4 \sqrt{e} - 5) \text{ cm}^2$$

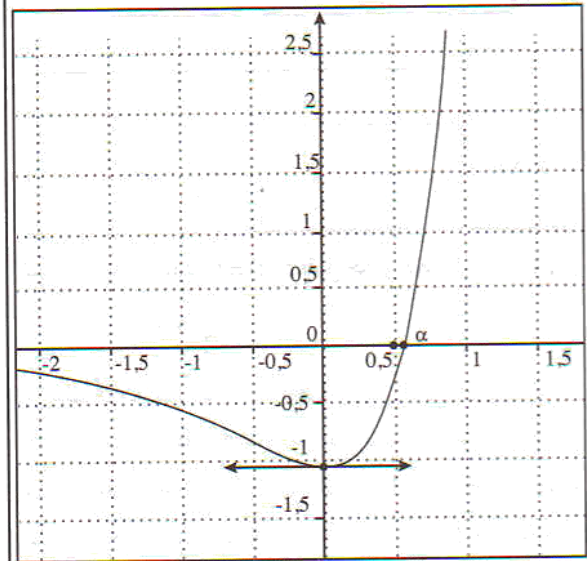
$$A = (4 \sqrt{e} - 5) \text{ cm}^2 \quad \text{إذن:}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} - 1\right) e^{\frac{1}{2}} \quad \text{و بما أن: } \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} < 1 \quad \text{فإن } f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

بما أن f متصلة وتزايدية قطعاً على  $[0; +\infty[$  فإنها كذلك على  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

ولدينا  $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$  إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن:  $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

ب- إنشاء (C) في المعلم  $(O, \bar{i}, \bar{j})$   
(تقبل وجود نقطة انعطاف وحيدة)



لدينا:  $f'(0) = 0$  يعني وجود تماس موازي لمحور الأفاصل في النقطة ذات الأفاصول 0.

5) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أبين أن:  $\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx = \frac{1}{4}$

أضع:  $(v(x) = x \text{ و } u'(x) = e^{2x})$

إذن:  $\left( v'(x) = 1 \text{ و } u(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \right)$