تصحيح التمرين الأول

1) لدينا : $\vec{u}(1,1,-1)$ متجهة منظمية للمستوى (P)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل : $(1).x+(1).y+(-1).z+d=0$

و بما أن $A(2,1,0)\in(P)$ فإن : $(1).(2)+(1).(1)+(-1).(0)+d=0$ أي : $d=-3$

و منه معادلة للمستوى (P) هي : $x+y-z-3=0$

2) **طريقة 1:**

بما أن (S) هي مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

فإن (S) هي الفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$

و منه Ω مركز الفلكة (S) هو منتصف القطعة $[AB]$ أي :
$$\begin{cases} x_\Omega=\dfrac{(2)+(-4)}{2}=-1 \\ y_\Omega=\dfrac{1+1}{2}=1 \\ z_\Omega=\dfrac{0+0}{2}=0 \end{cases}$$

أي $\Omega(-1,1,0)$ هي مركز الفلكة (S).

و شعاعها R هو : $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(-4-2)^2+(1-1)^2+(0-0)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{36}}{2}=\dfrac{6}{2}=3$

طريقة 2:

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

لدينا : $\overrightarrow{MA}(2-x,1-y,-z)$ و $\overrightarrow{MB}(-4-x,1-y,-z)$

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in(S) &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \\ &\Leftrightarrow (2-x)(-4-x)+(1-y)(1-y)+(-z)(-z)=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x+y^2-2y+1+z^2=8 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2+z^2=9 \\ &\Leftrightarrow (x-(-1))^2+(y-(1))^2+(z-(0))^2=(3)^2 \end{aligned}$$

و منه (S) هي الفلكة التي مركزها النقطة $\Omega(-1,1,0)$ و شعاعها 3

3) أ- $$d(\Omega,(P))=\frac{|(-1)+(1)-(0)-3|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

بما أن $d(\Omega,(P))<R$ فإن (P) يقطع (S) وفق دائرة (C)

ب- H مركز الدائرة (C) هي المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (P) أي هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على المستوى (P)

لدينا : $\vec{u}(1,1,-1)$ متجهة منظمية للمستوى (P) و $(\Delta)\perp(P)$

إذن $\vec{u}(1,1,-1)$ هي متجهة موجهة للمستقيم (Δ) و لدينا $\Omega(-1,1,0)\in(\Delta)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=(-1)+t(1)=-1+t \\ y=(1)+t(1)=1+t \\ z=(0)+t(-1)=-t \end{cases}$

و بالتالي مثلوث إحداثيات H هو حل للنظمة : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+t \\ z=-t \\ x+y-z-3=0 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} x=-1+1=0 \\ y=1+1=2 \\ z=-1 \\ t=1 \end{cases}$ و منه $H(0,2,-1)$ **هي** مركز الدائرة (C).

(4

✓ لدينا $\overrightarrow{OH}(0,2,-1)$ و $\overrightarrow{OB}(-4,1,0)$

$$\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & -4\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & -4\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$$

✓ مساحة المثلث OHB :

$$S_{(OHB)}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|=\frac{1}{2}\times\sqrt{(1)^2+(4)^2+(8)^2}=\frac{\sqrt{81}}{2}=\frac{9}{2}$$

تصحيح التمرين الثاني

I.

(1

$$\begin{aligned}|a| &= \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\\ &= \sqrt{4+4\sqrt{2}+2+2}\\ &= \sqrt{8+4\sqrt{2}}\\ &= \sqrt{4\left(2+\sqrt{2}\right)}\\ &= 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(2

$$a = 2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$
$$a = 2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$a = 2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

(3 أ- ليكن $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cos^2(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2\\ &= \frac{e^{2i\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-2i\theta}}{4}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+1+e^{-2i\theta}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\theta)+1\right)\end{aligned}$$

و منه : $1+\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$ لكل θ من $\mathbb{R}$

ب-

$$\begin{aligned} a &= 2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)+i.2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\left(1+\cos\left(2.\frac{\pi}{8}\right)\right)+i.2\sin\left(2.\frac{\pi}{8}\right) \\ &= 2\times 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+i.2\times 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &= 4\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+i.4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

ج-

✓ بما أن $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$ فإن الشكل المثلثي للعدد a هو :

$$a=4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right).\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

✓ لدينا : $a=|a|.\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

إذن : $a=2\sqrt{2+\sqrt{2}}.\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

حسب علاقة موافر :

$$a^4=\left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}.\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\right)^4=\left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4.\left(\cos\left(4.\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(4.\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

إذن : $a^4=\left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4.\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

و منه : $a^4=\left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$

(لأن $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$)

.II

1) لدينا $B(b)$ صورة $A(a)$ بالدوران R الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

إذن : $b-\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(a-\omega)$

إذن : $b-\sqrt{2}=i.(2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}-\sqrt{2})$

إذن : $b-\sqrt{2}=i.(2++i\sqrt{2})$

إذن : $b-\sqrt{2}=2i-\sqrt{2}$

ومنه : $b=2i$

2) لنحدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $|z-2i|=2$

لدينا : $$|z-2i|=2 \Leftrightarrow |z-b|=2 \Leftrightarrow BM=2$$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها B و شعاعها 2

تصحيح التمرين الثالث

I. التجربة " سحب في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق U_1 "

ليكن Ω_1 كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا : $card\,\Omega_1=C_7^3=35$

✓ A الحدث : " الحصول على كرة حمراء واحدة و كرتين خضراوين "

لدينا : $cardA=C_4^1\times C_3^2=4\times3=12$

إذن : $p(A)=\dfrac{cardA}{card\,\Omega_1}=\dfrac{12}{35}$

✓ B الحدث :" الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

لدينا : $cardB=C_4^3+C_3^3=4+1=5$

إذن : $p(B)=\dfrac{cardB}{card\,\Omega_1}=\dfrac{5}{35}=\dfrac{1}{7}$

II. التجربة " نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من U_1 ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من U_2 "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا : $card\,\Omega=C_7^2\times5=21\times5=105$

C الحدث : " الحصول على ثلاث كرات حمراء " .

لدينا : $cardC=C_4^2\times3=6\times3=18$

إذن : $p(C)=\dfrac{cardC}{card\,\Omega}=\dfrac{18}{105}=\dfrac{6}{35}$

تصحيح المسألة

I. (1

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x(1-\ln x)\neq 0, x>0\}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0,(1-\ln x)\neq 0, x>0\}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0,\ln x\neq 1, x>0\}$$
$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq e, x>0\}$$
$$=]0,e[\cup]e,+\infty[$$

2) أ-

x	0 $\quad e \quad$ $+\infty$
$1-\ln x$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$

✓ لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}}\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=-\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}}x=e\\ \lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}}1-\ln x=0^-\end{cases}$

✓ لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}}\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}}x=e\\ \lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}}1-\ln x=0^+\end{cases}$

التأويل الهندسي :

لدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}}f(x)=-\infty\end{cases}$ إذن : (C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته $x=e$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=0$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1-\ln x=-\infty\end{cases}$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ فإن (C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$

ج- لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x(1-\ln x)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x-x\ln x}=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x=0^+\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x\ln x=0^+\end{cases}$

التأويل الهندسي :

بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ فإن (C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته $x=0$

3) أ- ليكن $x\in D_f$:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x(1-\ln x)}\right)'$$

$$f'(x)=\frac{-(x(1-\ln x))'}{(x(1-\ln x))^2}$$

$$f'(x)=\frac{-((x)'(1-\ln x)+x(1-\ln x)')}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-(1-\ln x-1)}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

إذن : $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل x من D_f

ب- ليكن $x\in D_f$:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$$

لدينا : $x^2(1-\ln x)^2>0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\ln x$

- ✓ على المجال $]0,1]$: $\ln x\le 0$ إذن $f'(x)\le 0$ و منه f تناقصية
- ✓ على المجالين $[1,e[$ و $]e,+\infty[$: $\ln x\ge 0$ إذن $f'(x)\ge 0$ و منه f تزايدية

ج- **جدول تغيرات** f :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$ ‖	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$ ‖ $-\infty$	↗ 0

II. 1) أ- مبيانيا عدد حلول المعادلة (E) هو حلين لأن عدد نقط تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل هو نقطتين .

ب-

✓ g متصلة على المجال $[2,2;2,3]$

✓ $\begin{cases} g(2,2)=-0,02 \\ g(2,3)=0,12 \end{cases} \Rightarrow g(2,2)\times g(2,3)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : المعادلة (E) تقبل حلا α بحيث : $2,2<\alpha<2,3$

2) أ- ليكن $x\in D_f$:

$$\begin{aligned} f(x)-x &= \frac{1}{x(1-\ln x)}-x \\ &= \frac{1-x^2(1-\ln x)}{x(1-\ln x)} \\ &= \frac{g(x)}{x(1-\ln x)} \end{aligned}$$

إذن : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل x من D_f

ب-

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Leftrightarrow f(x)-x=0 \\ &\Leftrightarrow g(x)=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ أو } x=\alpha \end{aligned}$$

إذن (Δ) يقطع (C_f) في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 أو α

ج-

✓ على المجال $[1,\alpha]$:

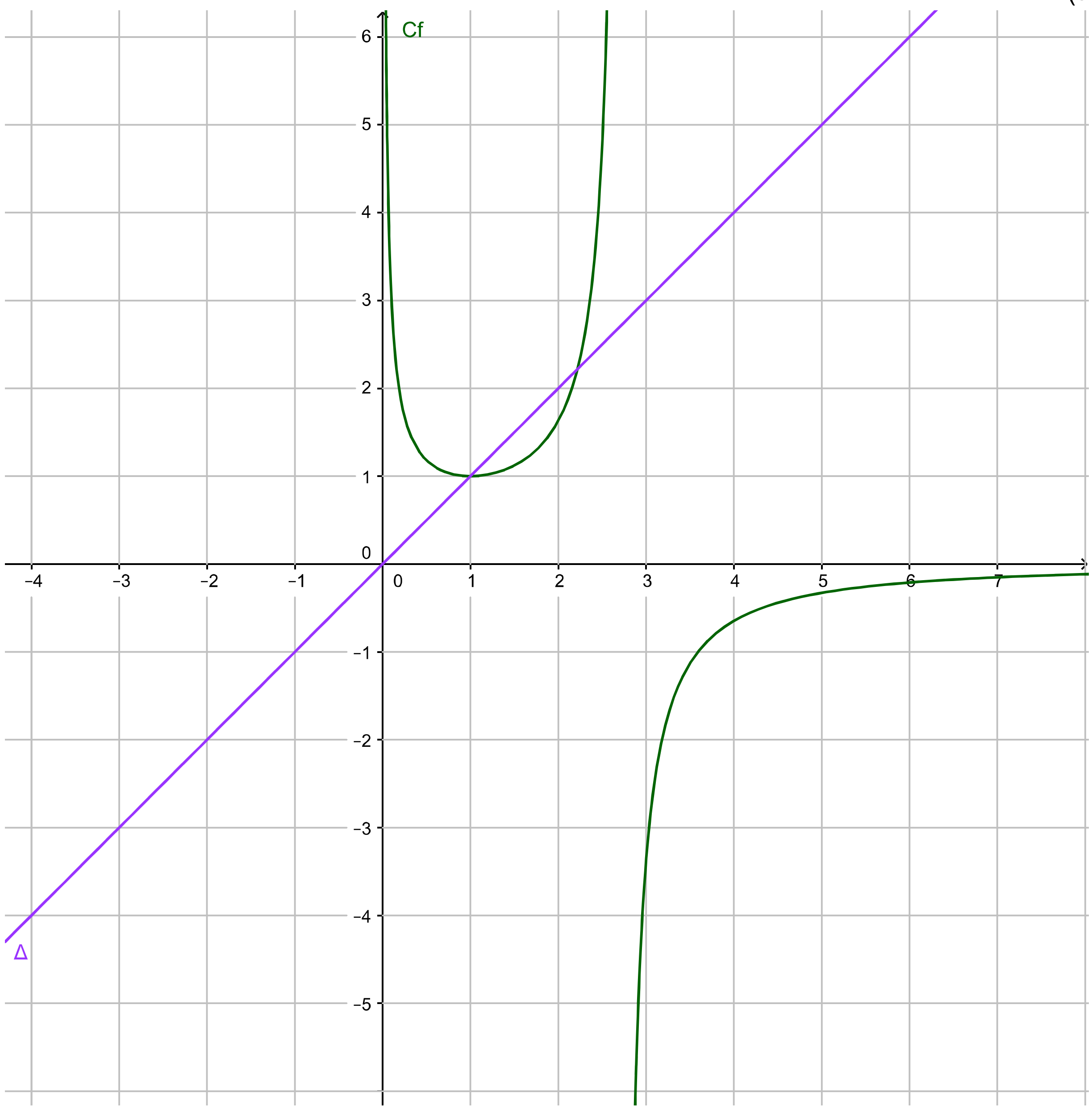
لدينا (C_g) يوجد تحت محور الأفاصيل إذن $g(x)\leq 0$ لكل x من المجال $[1,\alpha]$

✓

x	$1 \qquad \alpha$
$g(x)$	$0 \quad - \quad 0$
$x(1-ln(x))$	$+$
$f(x)-x$	$0 \quad - \quad 0$

إذن : $f(x)-x \leq 0$ لكل x من المجال $[1,\alpha]$

(3



(4 أ-

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}dx$$
$$= -\int_1^{\sqrt{e}} \frac{(1-\ln x)'}{1-\ln x}dx$$
$$= -\left[\ln\left|1-\ln(x)\right|\right]_1^{\sqrt{e}}$$
$$= -\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)-0\right)$$
$$= \ln 2$$

ب-

$$A = \int_1^{\sqrt{e}} \left|f(x)-x\right|dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$
$$= \int_1^{\sqrt{e}} (x-f(x))dx \times 2cm \times 2cm$$
$$= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{-g(x)}{x(1-\ln x)}dx \times 4cm^2$$
$$= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x^2(1-\ln x)-1}{x(1-\ln x)}dx \times 4cm^2$$
$$= \int_1^{\sqrt{e}} \left(x - \frac{1}{x(1-\ln x)}dx\right) \times 4cm^2$$
$$= \left(\int_1^{\sqrt{e}} x dx - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx\right) \times 4cm^2$$
$$= \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} - \ln 2\right) \times 4cm^2$$
$$= \left(\frac{e-1}{2} - \ln 2\right) \times 4cm^2$$
$$= (2e-2-4\ln 2)cm^2$$

▪III   (1

✓ من أجل $n=0$:

لدينا : $u_0 = 2$

إذن $1 \le u_0 \le \alpha$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

- نفترض أن : $1 \leq u_n \leq \alpha$
- و نبين أن : $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

لدينا حسب الإفتراض $1 \leq u_n \leq \alpha$

و لدينا الدالة f تزايدية على المجال $[1,\alpha]$

إذن : $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha)$

و منه : $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

✓ نستنتج أن : $1 \leq u_n \leq \alpha$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

2) حسب نتيجة السؤال II) 2) ج- لدينا : $f(x) - x \leq 0$ لكل x من $[1,\alpha]$

و بما أن $1 \leq u_n \leq \alpha$ لكل n من $\mathbb{N}$

فإن : $f(u_n) - u_n \leq 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

و بالتالي المتتالية (u_n) تناقصية

3)

✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة فإن (u_n) متقاربة

✓ لدينا : $\begin{cases} u_0 = 2 \in [1,\alpha] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

- الدالة f متصلة على المجال $[1,\alpha]$
- $f([1,\alpha]) = [f(1), f(\alpha)] = [1,\alpha]$
- (u_n) متقاربة

إذن نهاية المتتالية (u_n) هي حل للمعادلة $f(x) = x$

لدينا : $f(x) = x \Leftrightarrow x = 1$ أو $x = \alpha$

و بما أن (u_n) تناقصية فإن : $u_n \leq u_0$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن $u_n \leq 2$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه $\lim_{n \to +\infty} u_n \leq 2$ لكل n من $\mathbb{N}$

و بالتالي : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

つづく