



. ٠١

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بـ  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

. نتحقق أن : . ٠١  $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$

$$\bullet \quad u_{n+1} - 3 = \frac{3+u_n}{5-u_n} - 3 = \frac{3+u_n - 15 + 3u_n}{5-u_n} = \frac{-12 + 4u_n}{2 + (3 - u_n)} = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$$

. خلاصة :  $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$

. نبين بالترجع :  $u_n < 3$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

. نتحقق أن العلاقة صحيحة من أجل  $n = 0$ .

لدينا :  $u_0 = 2 < 3$  و منه العلاقة صحيحة من أجل  $n = 0$ .

نفترض أن العلاقة صحيحة إلى الرتبة  $n$  من  $\mathbb{N}$  أي  $u_n < 3$  (معطيات الترجع)

. نبين أن العلاقة صحيحة للرتبة  $n+1$  أي نبين أن :  $u_{n+1} < 3$

$$\left. \begin{array}{l} 4(u_n - 3) < 0 \\ 2 + (3 - u_n) > 0 \end{array} \right\} \text{أي } \left. \begin{array}{l} u_n - 3 < 0 \\ 3 - u_n > 0 \end{array} \right\} \text{حسب معطيات الترجع}$$

.  $u_{n+1} - 3 < 0$  و منه نستنتج أن  $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)} < 0$

. إذن : العلاقة صحيحة للرتبة  $n+1$ .

. خلاصة :  $u_n < 3$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

. ٠٢ . لتكن المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة بما يلي :  $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  و  $u_0 = 2$ .

. نبين أن المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ .

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{3 - u_{n+1}} \quad \bullet \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{\frac{3+u_n}{5-u_n} - 1}{3 - \frac{3+u_n}{5-u_n}}$$

$$= \frac{\frac{3+u_n - 5 + u_n}{5-u_n}}{15 - 3u_n - 3 - u_n}$$



$$= \frac{-2 + 2u_n}{12 - 4u_n}$$

$$= \frac{2}{4} \times \frac{-1 + u_n}{3 - u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \quad \text{و منه :} \quad = \frac{1}{2} \times v_n \quad \left( v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n} \right)$$

**خلاصة :** المتالية  $(v_n)$  متالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$

نستنتج أن :  $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  • .

بما أن : المتالية  $(v_n)$  متالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  إذن حدها العام يكتب على الشكل التالي

$$v_n = v_{n_0} \times q^{n-n_0} ; \quad (n_0 = 0)$$

$$= v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \quad \left( v_0 = \frac{u_0 - 1}{3 - u_0} = \frac{2 - 1}{3 - 2} = 1 \right)$$

$$= 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

**خلاصة :**  $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  . N لكل n من

**بـ** نبين أن :  $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$  .

$$v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n} \Leftrightarrow 3v_n - v_n \times u_n = u_n - 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow -v_n \times u_n - u_n = -1 - 3v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n \times (-1 - v_n) = -1 - 3v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-1 - 3v_n}{-1 - v_n} = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$$

**خلاصة :**  $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$  . N لكل n من

• نكتب  $u_n$  بدلالة n

$$u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n} = \frac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad \text{لدينا :}$$



**خلاصة :**  $u_n = \frac{2^n + 3}{2^n + 1}$  غير ضرورية حسب السؤال الموالي ( أو أيضاً :  $u_n = \frac{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$  )

جـ- نحدد نهاية المتتالية  $(u_n)$

• لدينا :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  لأن  $1 < \frac{1}{2} < -1$  حسب خاصية .

• و منه :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

**خلاصة :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

. 02

الفضاء منسوب إلى معلم متعمد منظم مباشر  $\langle 0, i, j, k \rangle$  ، نعتبر النقط  $A(2,1,3)$  و  $B(3,1,1)$  و  $C(2,2,1)$  و الفلكة  $(S)$  التي معادلتها ديكارتية :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$  .

. أـ- نبين أن :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  :

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  و  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  : لدينا

و منه :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

**خلاصة :**  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

. بـ- نستنتج أن :  $2x + 2y + z - 9 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$  .

• لدينا : المتجهة  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2;2;1)$  منظمية على المستوى  $(ABC)$  • ومنه :

$$M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2) + 2(y-1) + 1(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y + z - 9 = 0$$



**خلاصة :**  $2x + 2y + z - 9 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$ .

**.....02**

**أ** نبين أن : مركز الفلكة  $(S)$  هي النقطة  $\Omega(1, -1, 0)$  و أن شعاعها  $r = 6$  لدينا :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 - 1 + z^2 - 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 + z^2 - 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 36 = 6^2$$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لفلكة مركزها  $\Omega(1, -1, 0)$  و شعاعها  $r = 6$ .

**خلاصة :** مركز الفلكة  $(S)$  هي النقطة  $\Omega(1, -1, 0)$  و أن شعاعها  $r = 6$ .

**ب** نبين أن :  $d(\Omega, (ABC)) = 3$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 1 + 2(-1) + 0 - 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$$

**خلاصة :**  $d(\Omega, (ABC)) = 3$

نستنتج أن المستوى  $(ABC)$  يقطع الفلكة وفق دائرة  $(\Gamma)$ .

بما أن :  $(r = 6) > d(\Omega, (ABC)) = 3$  ;  $(r = 6)$  إذن المستوى  $(ABC)$  يقطع الفلكة وفق دائرة  $(\Gamma)$ .

**خلاصة :** المستوى  $(ABC)$  يقطع الفلكة وفق دائرة  $(\Gamma)$ .

**.....03**

**أ** نحدد تمثيل بارامتريا للمستقيم  $(\Delta)$  المار من النقطة  $\Omega$  والعمودي على المستوى  $(ABC)$ .

لدينا المتجهة :  $\Omega(1, -1, 0) \in (\Delta)$   $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  لأنها منتظمة على المستوى  $(ABC)$  و

تمثيل بارامترى للمستقيم  $(\Delta)$  هو :  $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

**خلاصة :** تمثيل بارامتريا للمستقيم  $(\Delta)$  هو :  $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

**ب** نبين أن : مركز الدائرة  $(\Gamma)$  هو النقطة  $B$

نعلم أن مركز الدائرة هو المسقط العمودي لمركز الفلكة  $(S)$  على المستوى  $(ABC)$  أي تقاطع المستوى  $(ABC)$  والمستقيم  $(\Delta)$  و منه :

$$M(x, y, z) \in (ABC) \cap (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (ABC) \\ M \in (\Delta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z - 9 = 0 \\ \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1+2t) + 2(-1+2t) + t - 9 = 0 \\ x = 1+2t \\ y = -1+2t \\ z = t \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 9t - 9 = 0 \\ x = 1+2t \\ y = -1+2t \\ z = t \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 1+2 \times 1 = 3 \\ y = -1+2 \times 1 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه : تقاطع المستوى  $(ABC)$  و المستقيم  $(\Delta)$  هي النقطة  $B(3,1,1)$   
خلاصة : مركز الدائرة  $(\Gamma)$  هي النقطة  $B(3,1,1)$

### 03

.01 . نحل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 - 4z + 29 = 0$

- حسب المعنى  $\Delta$  : لدينا :  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 29 = 16 - 116 = -100 = i^2 \times 10^2 = (10i)^2$
- حل المعادلة هما :  $z_1 = \frac{4+10i}{2} = 2+5i$  و  $z_2 = \bar{z}_1 = 2-5i$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي :  $S = \{2+5i; 2-5i\}$

.01 . نعتبر ، في المستوى العقدي  $(P)$  المنسوب إلى معلم متعمد منظم مباشر النقط  $\Omega$  و  $A$  و  $B$  التي أحققتها على

- التالي هي  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $\omega$  حيث :  $a = 5+2i$  و  $b = 2+5i$  و  $c = 5+8i$
- أ- ليكن  $u$  العدد الحقيقي حيث :  $u = b - \omega$ .
- نتحقق أن :  $u = 3+3i$
- لدينا :  $u = b - \omega = 5+8i - (2+5i) = 5+8i - 2-5i = 3+3i$

خلاصة :  $u = 3+3i$

- نبين أن :  $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

$$\arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ لدينا : } u = 3+3i = 3(1+i) = [3;0] \times \left[ \sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right] = \left[ 3\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$$

خلاصة :  $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

- ب- نحدد عمدة العدد العقدي  $\bar{u}$  .  
لدينا :



$$\begin{aligned}\arg(\bar{u}) &\equiv -\arg(u) [2\pi] \\ &\equiv -\arg(u) [2\pi] \\ &\equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]\end{aligned}$$

**خلاصة :**  $\arg(\bar{u}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

جـ نتحقق أن :  $a - \omega = \bar{u}$

لدينا :  $a - \omega = a = 5 + 2i - (2 + 5i) = 5 + 2i - 2 - 5i = 3 - 3i = \bar{u}$

**خلاصة :**  $a - \omega = \bar{u}$

نستنتج أن :  $\Omega A = \Omega B$  و  $\arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

لدينا :

$$\begin{aligned}|u| = |\bar{u}| &\Leftrightarrow |b - \omega| = |a - \omega| \\ &\Leftrightarrow \Omega B = \Omega A\end{aligned}$$

و منه :  $\Omega A = \Omega B$

لدينا :

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) &\equiv \arg\left(\frac{u}{\bar{u}}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg(u) - \arg(\bar{u}) [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]\end{aligned}$$

**خلاصة :**  $\arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

دـ لنعتبر الدوران  $R$  الذي مركزه  $\Omega$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$

نحدد صورة النقطة  $A$  بالدوران  $R$ .

طريقة ١ :

لدينا :

نعم أن:  $\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B} \equiv \arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

و هذا يمثل أن  $B$  صورة  $A$  بالدوران الذي مركزه  $\Omega$  و قياس

$$\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{أي} \quad \arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

زاويته هو  $\frac{\pi}{2}$



**خلاصة :** صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة B التي لحقها  $b = 5 + 8i$   
**طريقة 2 :** (غير مرغوب فيها حسب أجوية الأسئلة السابقة)

لدينا الشكل العقدي هو :  $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$  مع  $\omega$  هو لحق مركز الدوران و  $\theta$  هو قياس زاوية الدوران :  
و منه :

$$\begin{aligned} z' - (2 + 5i) &= (z - (2 + 5i))e^{\frac{i\pi}{2}} \\ z' &= 2 + 5i + (z - 2 - 5i)i \quad ; \quad \left( e^{\frac{i\pi}{2}} = i \right) \\ z' &= iz + 2 + 5i - 2i + 5 \\ z' &= iz + 7 + 3i \end{aligned}$$

**خلاصة :** الكتابة العقدية للدوران  $r$  و منه :

$$\begin{aligned} r(A) &= A' \Leftrightarrow a' = i(5 + 2i) + 7 + 3i \\ &\Leftrightarrow a' = 8i + 5 = b \end{aligned}$$

**خلاصة :** صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة B التي لحقها  $b = 5 + 8i$

## 04

**تحتوي صندوق:** على 10 كرات أربع كرات حمراء و ست كرات خضراء ( لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس ) .  
نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق

**01.** ليكن A الحدث : " الكرتان المسحوبتان حمراوان "

$$\text{نبين أن : } p(A) = \frac{2}{15}$$

• عدد السحبات الممكنة : سحب كرتين في آن واحد من بين 10 كرات يمثل تأليفه ل 2 من بين 10 .

$$\text{و منه : } \text{card}\Omega = C_{10}^2 = \frac{10 \times 9}{1 \times 2} = 45$$

• نحسب  $\text{card}A$

$$\text{card}A = C_4^2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6 \text{ و منه : } 6$$

$$\text{و منه : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

$$\text{خلاصة : } p(A) = \frac{2}{15}$$

**02.** ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين .

أـ نبين أن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي  $\{2, 3, 4\}$  .

عندما نسحب كرتين من اللون الأحمر يبقى في الصندوق كرتين من اللون الأحمر إذن القيمة ل X هي 2 .

عندما نسحب كرتين من اللون الأخضر يبقى في الصندوق أربع كرات من اللون الأحمر إذن القيمة ل X هي 4 .

عندما نسحب كرة من اللون الأحمر والأخرى من اللون الأخضر يبقى في الصندوق ثلاثة كرات من اللون الأحمر إذن القيمة ل X هي 3

**خلاصة :** مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي  $\{2, 3, 4\}$  .



- بـ نبين أن :  $p(X=3) = \frac{8}{15}$
- الحدث  $(X=3)$  يمثل الحدث " سحب كرتين من لونين مختلفين "
- و منه : سحب كرة حمراء من بين 4 إذن  $C_4^1 = 4$  و كرة خضراء من بين 6 إذن  $C_6^1 = 6$  ومنه  $C_4^1 \times C_6^1 = 24$
- و وبالتالي :  $p(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{24}{45} = \frac{8 \times 3}{15 \times 3} = \frac{8}{15}$
- خلاصة :**  $p(X=3) = \frac{8}{15}$
- نحدد قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$  نلخص ذلك بالجدول التالي :

سحب لكرتين	من اللون الأحمر	احدهما حمراء والأخرى خضراء	من اللون الأخضر	المجموع
$x_i$	2	3	4	
$p(X=x_i)$	$p(X=2) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$	$p(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$	$p(X=4) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$	1

## 05

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

ليكن  $(\mathcal{C}_f)$  منحنى الدالة  $f$  في معلم متواحد منتظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة 1 cm).

I

### 01

أـ نبين أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

**خلاصة :**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

بـ نبين أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = 2x - 2$  مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  بجوار  $-\infty$ .

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  و منه:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x - (2x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - 4e^x = 0$$

و منه :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x - 2) = 0$

**خلاصة :** المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = 2x - 2$  مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  بجوار  $-\infty$ .

### 02

أـ نبين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 + e^x(e^x - 4) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(e^x - 4) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

**خلاصة :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**بـ** نبين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2 + e^{2x} - 4e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{x} + \frac{e^x}{x}(e^x - 4) = +\infty$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 4 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{x} = 2 \text{ لأن : } 2 > 0$$

**خلاصة :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

**نقول النتيجة هندسيا :**

(C<sub>f</sub>) منحنى الدالة  $f$  يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب بجوار  $+\infty$ .

### • 03

**أـ** نبين أن :  $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

لدينا : الدالة  $f$  قابلة للاشتتقاق على  $\mathbb{R}$  لأنها مجموع عدة دوال قابلة الاشتتقاق على  $\mathbb{R}$ .

لدينا :  $f'(x) = (2x - 2 + e^{2x} - 4e^x)' = 2 + 2e^{2x} - 4e^x = 2\left(1 + (e^x)^2 - 2e^x\right) = 2\left((e^x)^2 - 2e^x + 1\right) = 2(e^x - 1)^2$

**خلاصة :**  $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

**بـ** نضع جدول تغيرات  $f$

x	-∞	0	+∞
f'	+	0	+
f		↗ 0	↗ +∞

**جـ** بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $[1, \ln 4]$  حيث  $f(\alpha) = 0$

ثبت أن :  $f$  تقابل من  $[1, \ln 4]$  إلى  $(1, \ln 4)$ .

الدالة  $f$  متصلة لأنها قابلة للاشتتقاق (أو أيضاً مجموع عدة دوال متصلة) على  $[1, \ln 4]$

$f$  تزايدية قطعاً على  $[1, \ln 4]$  (إذن  $f$  تقابل من  $[1, \ln 4]$  إلى  $[1, \ln 4]$ )

لدينا  $f(1) \times f(\ln 4) = (e^2 - 4e)(4 \ln 2 - 2) = e \underbrace{(e-4)}_{<0} 2 \times \underbrace{(2 \ln 2 - 1)}_{>0} < 0$ ;  $(2 \ln 2 - 1 = \ln 4 - \ln e > 0$ ;  $4 > e$ )

- ومنه :  $0 \in f([1, \ln 4]) = [e^2 - 4e; 4\ln 2 - 2]$
- إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد عدد وحيد  $\alpha$  من المجال  $[1, \ln 4]$  حيث  $f(\alpha) = 0$ . (أو أيضاً حسب الدالة  $f$  تقابل )
- خلاصة :** يوجد عدد وحيد  $\alpha$  من المجال  $[1, \ln 4]$  حيث  $f(\alpha) = 0$

.. 04

- ١ نبين أن المنحنى  $(C_f)$  يوجد فوق المستقيم  $(D)$  على المجال  $[\ln 4; +\infty)$  وتحت المستقيم  $(D)$  على المجال  $[-\infty; \ln 4]$ .
- لها ندرس إشارة  $f(x) - (2x - 2)$  لدينا :

$$f(x) - (2x - 2) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x - 2x + 2 = e^x(e^x - 4)$$

إشارة الفرق هي إشارة  $e^x - 4$  لأن  $e^x > 0$ ندرس إشارة  $e^x - 4$ 

ومنه :

$$e^x - 4 > 0 \Leftrightarrow e^x > 4$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) > \ln 4$$

$$\Leftrightarrow x > \ln 4$$

وضع  $(C_f)$  و المستقيم بواسط الجدول التالي :

x	-∞	ln 4	+∞
$f(x) - (2x - 2)$	-	0	+
الوضع النسبي لـ $(C_f)$ و المستقيم $(D)$	$(D)$ تحت $(C_f)$		$(D)$ فوق $(C_f)$
	<b>(D) يقطع <math>(C_f)</math></b>		

٢ نبين أن : المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثياتها هو  $(0, -5)$ .نحسب الدالة المشقة الثانية لتحديد نقطة انعطاف  $f''$ .لدينا :  $f''(x) = [2(e^x - 1)^2] = 2 \times 2(e^x - 1)'(e^x - 1) = 4e^x(e^x - 1)$  و منه :  $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$ إشارة  $f''$  هي إشارة  $e^x - 1$  و منه :

$$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) \geq \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

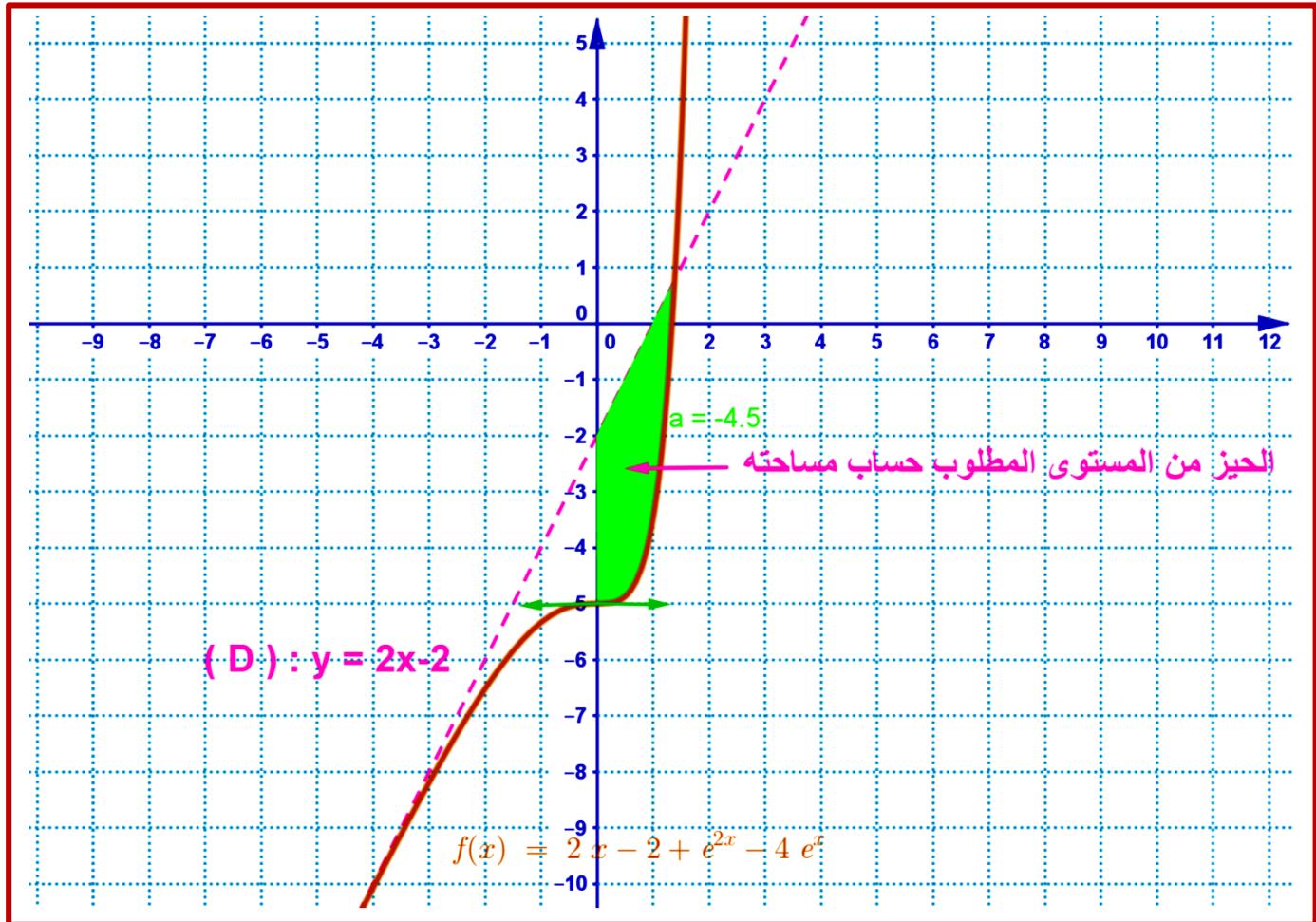
إشارة  $f''$  بواسطة الجدول التالي :

x	-∞	0	+∞
$f''(x)$	-	0	+

ومنه : الدالة المشتقة الثانية تندم في  $x_0 = 0$  و تتغير اشارتها بحوار  $x_0 = 0$  إذن النقطة التي أقصولها  $x_0 = 0$  هي نقطة انعطاف و حيدة و لدينا  $-5 = f(0) = 2 \times 0 - 2 + e^{2 \times 0} - 4e^0 = -2 + 1 - 4$

**خلاصة :** المنحنى ( $C_f$ ) يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج (حداثتها هو  $(0, -5)$  .

**جـ** ننشئ المستقيم ( $D$ ) و المنحنى ( $C_f$ ) في نفس المعلم ( ) نأخذ  $O; i; j$  و  $\alpha \approx 1,3$  و  $\ln 4 \approx 1,4$  .



..05

$$\text{أـ} \quad \int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$$

لدينا :

$$\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = \left[ \frac{1}{2} e^{2x} - 4e^x \right]_0^{\ln 4} = \frac{1}{2} e^{2\ln 4} - 4e^{\ln 4} - \left( \frac{1}{2} e^{2 \times 0} - 4e^0 \right) = \frac{1}{2} \times e^{\ln 16} - 4 \times 4 - \left( \frac{1}{2} \times 1 - 4 \times 1 \right) = -\frac{9}{2}$$

$$\text{خلاصة :} \quad \int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$$

**بـ** نحسب ب  $\text{cm}^2$  مساحة حيز من المستوى المحصور بين المنحنى ( $C_f$ ) و المستقيم ( $D$ ) و محور الأراتيب و المستقيم الذي

$$\text{معادله} \quad x = \ln 4$$

المساحة المطلوبة هي :

$$\cdot \int_0^{\ln 4} ((2x-2)-f(x))dx = \int_0^{\ln 4} (e^{2x}-4e^x)dx = -\int_0^{\ln 4} (e^{2x}-4e^x)dx = -\left(\frac{-9}{2}\right) = \frac{9}{2} \text{ cm}^2$$

**خلاصة :** مساحة حيز من المستوى المحصور بين المنحنى ( $C_f$ ) و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادله  $x = \ln 4$

هي  $\frac{9}{2} \text{ cm}^2$

....II

....01

أ-

نحل المعادلة التفاضلية :  $y'' - 3y' + 2y = 0$

هي معادلة على شكل  $r^2 - 3r + 2 = 0$  و منه المعادلة المميزة هي :

نحل المعادلة المميزة :

لدينا :

$$\begin{aligned} r^2 - 3r + 2 = 0 &\Leftrightarrow r^2 - r - 2r + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow r(r-1) - 2(r-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (r-1)(r-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow r = 1 \text{ أو } r = 2 \end{aligned}$$

و منه المعادلة المميزة لها حلين حقيقيين  $r_1 = 1$  و  $r_2 = 2$

وبالتالي : الحل العام للمعادلة التفاضلية هي الدوال التي على شكل :  $y = \alpha e^x + \beta e^{2x}$  مع  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$ .

بـ نحدد الحل  $g$  للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين  $-3 = g(0)$  و  $-2 = g'(0)$ .

لدينا :  $g(0) = -3$  و  $g'(0) = -2$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  نحدد

لدينا :  $g(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x}$  و منه  $g'(x) = (\alpha e^x + \beta e^{2x})' = \alpha e^x + 2\beta e^{2x}$

و  $g(0) = -3 \Leftrightarrow \alpha \times 1 + \beta \times 1 = -3$

نحصل على النظمة :  $\begin{cases} \alpha + 2\beta = -2 \\ \alpha + \beta = -3 \end{cases}$  و منه  $\beta = 1$  و  $\alpha = -4$

**خلاصة :** الحل  $g$  للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين  $-3 = g(0)$  و  $-2 = g'(0)$  هي

.02. لتكن  $h$  الدالة العددية المعرفة على  $[+4; +\infty)$  بما يلي :

أـ نبين أن الدالة  $h$  تقبل دالة عكسية  $h^{-1}$  و أن  $h^{-1}$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

نلاحظ أن :  $f(x) - (2x-2) = e^{2x} - 4e^x = g(x)$  و  $h(x) = \ln(g(x))$

• اتصال  $h$  على  $[+4; +\infty)$

لدينا الدالة :  $x \mapsto e^{2x} - 4e^x$  :  $g$  متصلة ( لأنها قابلة للاشتاقاق مرتين و ذلك حل خاص للمعادلة التفاضلية من الدرجة 2 ) و موجبة

قطعا على  $[+4; +\infty)$  ( لأن المنحنى ( $C_f$ ) يوجد فوق المستقيم (D) على المجال  $[+4; +\infty)$  ) ومنه

$$(f(x) - (2x-2)) = e^{2x} - 4e^x = g(x) > 0$$

• الدالة :  $x \mapsto \ln x$  متصلة على  $[0; +\infty)$

و منه : الدالة :  $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x)$  متصلة على  $[+∞; +∞]$  لأنها مركبة دالتين متصلتين .

- الرتابة قطعا على  $[+∞; +∞]$  :

لدينا الدالة :  $x \mapsto \ln x$  تزايدية قطعا على  $[0; +∞]$

لدينا الدالة :  $x \mapsto e^{2x} - 4e^x = 2e^x(e^x - 2)$  مع دالتها المشتقه هي  $x \mapsto 2e^{2x} - 4e^x$  قابلة للاشتاق على  $[+∞; +∞]$  إذن الدالة المشتقه هي  $e^{2x} - 4e^x > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$  هي تزايدية قطعا على  $[+∞; +∞]$  و منه هي تزايدية قطعا على  $[+∞; +∞]$  ( لأن  $[+∞; +∞] \subset [\ln 2; +∞]$  ) لأنها مركبة دالتين تزايديتين قطعا .

و بالتالي الدالة  $h$  هي متصلة و تزايدية قطعا على  $[+∞; +∞]$  إذن  $h$  تقبل دالة عكسيه  $h^{-1}$  من  $J = h([\ln 4; +∞[$  .

**خلاصة :**  $h$  تقبل دالة عكسيه  $h^{-1}$  من  $([\ln 4; +∞[ \rightarrow J = h([\ln 4; +∞[$

نحدد  $J$

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow (\ln 4)^+} f(x) - (2x - 2) = 0^+ \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow (\ln 4)^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow (\ln 4)^+} \ln(f(x) - (2x - 2)) = -\infty .$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{2x} - 4e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln e^x (e^x - 4) = +\infty$$

$$h([\ln 4; +\infty[) = \left[ \lim_{x \rightarrow (\ln 4)^+} h(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right] = \mathbb{R} : \text{و منه :}$$

**خلاصة :** الدالة  $h$  تقبل دالة عكسيه  $h^{-1}$  معرفة على  $\mathbb{R}$  .

• نتحقق أن :  $(h^{-1})'(\ln 5) = \ln 5$  ثم نحدد  $h(\ln 5) = \ln 5$

$$h(\ln 5) = \ln(e^{2\ln 5} - 4e^{\ln 5}) = \ln(e^{\ln 25} - 4 \times 5) = \ln(25 - 20) = \ln 5$$

**خلاصة :**  $h(\ln 5) = \ln 5$

• نحدد  $(h^{-1})'(\ln 5)$

لدينا :

لدينا :  $h$  قابلة للاشتاق على  $[+∞; +∞]$  ( مركبة دالتين قابلين للاشتاق ) و منه  $h$  قابلة للاشتاق في  $\ln 5$  ( لأن  $\ln 5 \in [+∞; +∞[$  )

نبين أن :  $h'(\ln 5) \neq 0$  ( أي  $h'$  لا تعدم في  $\ln 5$  )

$$h'(x) = (\ln(e^{2x} - 4e^x))' = \frac{(e^{2x} - 4e^x)'}{e^{2x} - 4e^x} = \frac{2e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 4e^x} = \frac{2e^x(e^x - 2)}{e^x(e^x - 4)} = \frac{2(e^x - 2)}{e^x - 4}$$

$$h'(\ln 5) \neq 0 \text{ و بالتالي } h'(\ln 5) = \frac{2(5 - 2)}{5 - 4} = \frac{2(5 - 2)}{5 - 4} = 6 \text{ و منه :}$$

لسنة 2016 - 2015

تصحيح الامتحان الوطني

إذن الدالة العكسيّة  $h^{-1}$  قابلة للاشتقاق في  $(\ln 5)$  مع  $h'(\ln 5) = \frac{1}{h'(\ln 5)}$

$$\left( h^{-1} \right)'(\ln 5) = \frac{1}{6} \quad \text{خلاصة :} \quad \left( h^{-1} \right)'(h(\ln 5)) = \frac{1}{h'(\ln 5)} = \frac{1}{6}$$

انتهى