التصحيح :

تصحيح التمرين الأول :

1) أ. لنبين بالترجع أن : $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ من أجل $n = 0$:

لدينا $u_0 = 2$

إذن $u_0 > 1$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

- نفترض أن : $u_n > 1$
- و نبين أن : $u_{n+1} > 1$

لدينا حسب الإفتراض : $u_n > 1$

إذن $\frac{1}{16}u_n > \frac{1}{16}$

إذن $\frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > \frac{1}{16} + \frac{15}{16}$

إذن : $u_{n+1} > 1$

✓ نستنتج أن : $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب.

❖ ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - u_n \\ &= \left(\frac{1}{16} - 1\right)u_n + \frac{15}{16} \\ &= \frac{-15}{16}u_n + \frac{15}{16} \end{aligned}$$

إذن : $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ لكل n من $\mathbb{N}$

❖ لدينا حسب نتيجة السؤال 1) أ. $u_n > 1$

إذن $u_n - 1 > 0$

إذن $\frac{-15}{16}(u_n - 1) < 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

و بالتالي المتتالية (u_n) تناقصية

ج. بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة (بالعدد 1) فإن (u_n) متقاربة

2)

أ.

❖ ليكن $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-1 \\ &= \frac{1}{16}u_n+\frac{15}{16}-1 \\ &= \frac{1}{16}u_n-\frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{16}(u_n-1) \\ &= \frac{1}{16}v_n \end{aligned}$$

إذن $v_{n+1}=\frac{1}{16}v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{16}$

و حدها الأول $v_0=u_0-1=2-1=1$

❖ لنكتب v_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=v_0\times q^n$ إذن : $v_n=1\times\left(\frac{1}{16}\right)^n$

و منه $v_n=\left(\frac{1}{16}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب.

❖ ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا $v_n=u_n-1$ إذن $u_n=v_n+1$

و منه $u_n=\left(\frac{1}{16}\right)^n+1$ لكل n من $\mathbb{N}$

❖ بما أن $-1<\frac{1}{16}<1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^n=0$

و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

تصحيح التمرين الثاني :

1) أ. لدينا : $\overrightarrow{OA}(1,3,4)$ و $\overrightarrow{OB}(0,1,2)$

لدينا : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}3 & 1\\4 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\4 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$

إذن : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

ب. لدينا : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(2,-2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (OAB)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) تكتب على شكل : $2.x-2.y+1.z+d=0$

و بما أن : $O(0,0,0)\in(OAB)$ فإن : $2.(0)-2.(0)+1.(0)+d=0$

إذن : $d=0$

و بالتالي معادلة للمستوى (OAB) هي : $2x-2y+z=0$

2) لتكن الفلكة (S) التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$

لدينا : $x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$

تكافئ : $x^2-6x+y^2+6y+z^2-6z=-2$

تكافئ :

$$x^2-2(3)x+(3)^2+y^2-2(-3)y+(-3)^2+z^2-2(3)z+(3)^2=-2+(3)^2+(3)^2+(3)^2$$

تكافئ : $(x-(3))^2+(y-(-3))^2+(z-(3))^2=25=(5)^2$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(3,-3,3)$ و شعاعها $R=5$

3) أ. لدينا : $d(\Omega,(OAB))=\dfrac{|2(3)-2(-3)+(3)|}{\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(1)^2}}=\dfrac{15}{3}=5$

بما أن : $d(\Omega,(OAB))=R$ فإن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S)

ب. لنحدد $H(x_H,y_H,z_H)$ نقطة تماس المستوى (OAB) و الفلكة (S)

لدينا $H(x_H,y_H,z_H)$ هي المسقط العمودي للنقطة $\Omega(3,-3,3)$ على المستوى (OAB)

و بالتالي $H(x_H,y_H,z_H)$ هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) المار من $\Omega(3,-3,3)$

و العمودي على المستوى (OAB) مع المستوى (OAB).

لدينا $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(2,-2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (OAB) و بما أن $(\Delta)\perp(OAB)$

فإن : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(2,-2,1)$ هي متجهة موجهة للمستوى (OAB). و لدينا (Δ) $\Omega(3,-3,3)\in(\Delta)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) : $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -3-2t \\ z = 3+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$H(x_H, y_H, z_H) \in (\Delta) \cap (OAB)$ تكافئ $\begin{cases} x_H = 3+2t \\ y_H = -3-2t \\ z_H = 3+t \\ 2x_H - 2y_H + z_H = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

بالتعويض نجد : $2(3+2t) - 2(-3-2t) + (3+t) = 0$

ومنه: $t = -1$

و بالتالي : $\begin{cases} x_H = 3+2(-1) = 1 \\ y_H = -3-2(-1) = -1 \\ z_H = 3+(-1) = 2 \end{cases}$ أي : $H(1,-1,2)$.

تصحيح التمرين الثالث :

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 8z + 41 = 0$

لدينا : $\Delta = (-8)^2 - 4(1)(41) = -100$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقددين مترافقين

$z = \dfrac{-(-8) - i\sqrt{100}}{2(1)}$ أو $z = \dfrac{-(-8) + i\sqrt{100}}{2(1)}$

$z = 4+5i$ أو $z = 4-5i$

إذن : $S = \{4-5i, 4+5i\}$

2) أ. لدينا : $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{(6+7i)-(3+4i)}{(4+5i)-(3+4i)} = \dfrac{3+3i}{1+i} = \dfrac{3(1+i)}{1+i} = 3$

بما أن $\dfrac{c-b}{a-b} \in \mathbb{R}$ فإن النقط A و B و C مستقيمية.

ب. R الدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و زاويته $\dfrac{-\pi}{2}$

$M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران R

لدينا : $z' - \omega = e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}(z - \omega)$

إذن : $z'-(4+7i)=-i\left(z-(4+7i)\right)$

إذن : $z'-4-7i=-i\left(z-4-7i\right)$

إذن : $z'=-i\left(z-4-7i\right)+4+7i$

إذن : $z'=-iz+4i-7+4+7i$

و منه : $z'=-iz-3+11i$

ج.

❖ **لنحدد صورة النقطة** C **بالدوران** R **:**

لدينا : $-ic-3+11i=-i\left(6+7i\right)-3+11i=-6i+7-3+11i=4+5i=a$

إذن : A **هي صورة** C **بالدوران** R**.**

❖ **لدينا :** $R(C)=A$ إذن : $\begin{cases} \Omega A=\Omega C \\ \left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \dfrac{\Omega A}{\Omega C}=1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \left|\dfrac{a-\omega}{c-\omega}\right|=1 \\ \arg\left(\dfrac{a-\omega}{c-\omega}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

و منه : $\dfrac{a-\omega}{c-\omega}=1\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)\right)$

<u>تصحيح التمرين الرابع :</u>

التجربة " نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق "

ليكن Ω **كون إمكانيات هذه التجربة**

لدينا : $card\,\Omega=A_{10}^{2}=90$

1) A **" الحصول على كرتين تحملان عددين زوجيين "**

لدينا : $cardA=A_{6}^{2}=30$

إذن : $p(A)=\dfrac{cardA}{card\,\Omega}=\dfrac{30}{90}$

ومنه : $p(A)=\dfrac{1}{3}$

2) لدينا : X **متغير عشوائي حداني وسيطاه** $n=3$ **و** $p=p(A)=\dfrac{1}{3}$

$$p(X=1)=C_3^1p^1(1-p)^{3-1}=3\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

لنحدد قانون احتمال X **:**

$$p(X=0)=C_3^0p^0(1-p)^{3-0}=1\times1\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

$$p(X=1)=\frac{4}{9}=\frac{12}{27}$$

$$p(X=2)=C_3^2p^2(1-p)^{3-2}=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^1=\frac{2}{9}=\frac{6}{27}$$

$$p(X=3)=C_3^3p^3(1-p)^{3-3}=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^0=\frac{1}{27}$$

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{4}{9}=\dfrac{12}{27}$	$\dfrac{2}{9}=\dfrac{6}{27}$	$\dfrac{1}{27}$

تصحيح المسألة :

I.

1) $g(1)=\dfrac{2}{1}-1+2\ln(1)=2-1+(2\times0)=1$

2) لدينا $g(1)$ **هي القيمة الدنوية للدالة** g **على** $]0,+\infty[$

إذن : $\forall x\in\,]0,+\infty[\,:g(x)\geq g(1)$

إذن : $\forall x\in\,]0,+\infty[\,:g(x)\geq 1$

و منه : $\forall x\in\,]0,+\infty[\,:g(x)>0$

II.

1) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}3-3x+2(x+1)\ln(x)=-\infty$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 3-3x = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 2(x+1) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty \end{cases}$$

التأويل الهندسي : (C) يقبل مقارب عمودي معادلته $x = 0$

2) أ.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} 3-3x+2(x+1)\ln x \\ &= \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{3}{x}-3+2\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln x\right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x}-3 = -3 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

ب. لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x}-3+2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$

إذن : (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3) أ. ليكن $x \in]0,+\infty[$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(3-3x+2(x+1)\ln(x)\right)' \\
&= -3+2\left((x+1)'\ln(x)+(x+1)\ln'(x)\right) \\
&= -3+2\left(\ln(x)+(x+1)\times\frac{1}{x}\right) \\
&= -3+2\left(\ln x+\frac{x+1}{x}\right) \\
&= -3+2\left(\ln x+1+\frac{1}{x}\right) \\
&= -3+2\ln x+2+\frac{2}{x} \\
&= \frac{2}{x}-1+2\ln x
\end{aligned}$$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=g(x)$

ت. حسب I. 2) لدينا : $\forall x\in\,]0,+\infty[\,: g(x)>0$

و منه : $\forall x\in\,]0,+\infty[\,: f'(x)>0$

و بالتالي f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

4) أ. ليكن $x\in\,]0,+\infty[$:

لدينا f' قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) \\ &= g'(x) \\ &= \frac{-2}{x^2}+\frac{2}{x} \\ &= \frac{-2+2x}{x^2} \\ &= \frac{2(x-1)}{x^2} \end{aligned}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

بما أن $x^2>0$ **فإن إشارة** $f''(x)$ **هي إشارة** $x-1$

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

لدينا : f'' **تنعدم و تغير إشارتها عند** 1 **إذن النقطة** $I(1,0)$ **هي نقطة انعطاف للمنحنى** (C).
(لاحظ $f(1)=0$)

ب. معادلة ديكارتية للمستقيم (T) **المماس للمنحنى** (C) **في النقطة** $I(1,0)$:

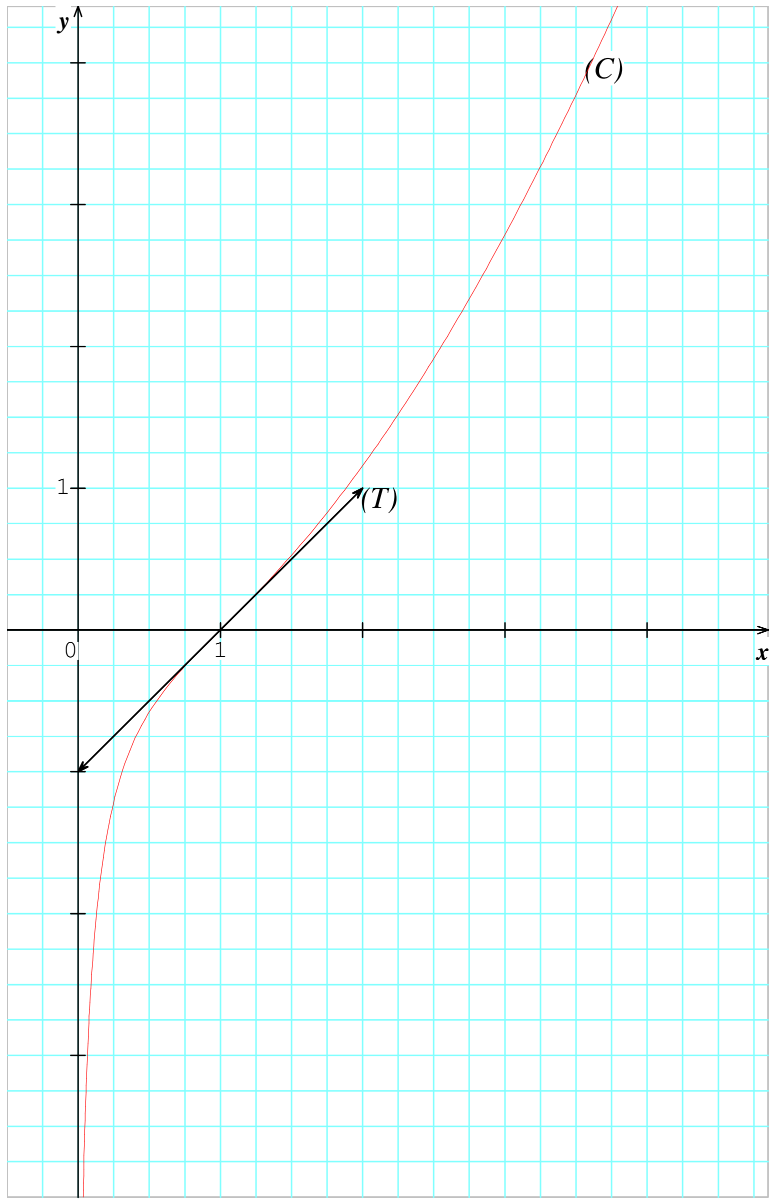
$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

لدينا : $f'(1)=g(1)=1$ **و** $f(1)=0$

إذن : $y=1\times(x-1)+0$

و منه : $(T): y=x-1$

ج. إنشاء (C):



5) أ.

$$\int_1^2\left(1+\frac{x}{2}\right)dx = \left[x+\frac{x^2}{4}\right]_1^2$$
$$=\left(2+\frac{2^2}{4}\right)-\left(1+\frac{1^2}{4}\right)$$
$$=3-\frac{5}{4}$$
$$=\frac{7}{4}$$

ب.

$$\begin{cases}u'(x)=x+1\\ v(x)=\ln x\end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases}u(x)=\dfrac{x^2}{2}+x\\ v'(x)=\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

$$\int_1^2(x+1)\ln(x)dx = \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\times\frac{1}{x}dx$$
$$=(4\ln 2)-\left(\frac{3}{2}\ln 1\right)-\int_1^2\left(1+\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=4\ln(2)-\frac{7}{4}$$

ج. لدينا : $A=\int_1^2|f(x)|dx\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

على المجال $[1,2]$ **لدينا :** $f(x)\geq 0$

إذن : $A=\int_1^2 f(x)dx\times 2cm\times 2cm$

إذن : $A=\int_1^2(3-3x+2(x+1)\ln(x))dx\times 4cm^2$

إذن: $A=\left(\int_1^2(3-3x)dx+2\int_1^2(x+1)\ln(x)dx\right)\times 4cm^2$

إذن : $A=\left(\left[3x-\frac{3x^2}{2}\right]_1^2+2\left(4\ln(2)-\frac{7}{4}\right)\right)\times 4cm^2$

إذن : $A = \left((0) - \left(\frac{3}{2}\right) + 8\ln(2) - \frac{7}{2} \right) \times 4cm^2$

إذن : $A = \left(-5 + 8\ln(2)\right) \times 4cm^2$

و منه : $A = \left(-20 + 32\ln(2)\right) cm^2$

6) لنحل مبيانيا : $(x+1)\ln(x) \geq \frac{3}{2}(x-1)$ $: x \in]0,+\infty[$

$$\begin{aligned}(x+1)\ln(x) \geq \frac{3}{2}(x-1) &\Leftrightarrow 2(x+1)\ln(x) \geq 3(x-1)\\ &\Leftrightarrow 2(x+1)\ln x \geq 3x-3\\ &\Leftrightarrow 3-3x+2(x+1)\ln x \geq 0\\ &\Leftrightarrow f(x) \geq 0\end{aligned}$$

مبيانيا $f(x) \geq 0$ تعني أن (C) **يوجد فوق محور الأفاصيل**

و بالتالي : $S = [1,+\infty[$