

حلول الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2017  
مادة الرياضيات - شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

التمرين الأول :

<p>1- أ. لتكن : <math>ax + by + cz + d = 0</math> معادلة ديكارتية للمستوى <math>(P)</math> وبما ان : <math>\vec{u}(1,0,-1)</math> متجهة منظمية على المستوى <math>(P)</math> فان : <math>a=1</math> و <math>b=0</math> و <math>c=-1</math> ومنه معادلة المستوى <math>(P)</math> تصبح : <math>x - z + d = 0</math> وبما ان : المستوى <math>(P)</math> يمر من النقطة <math>A(0,1,1)</math> فان : <math>0 - 1 + d = 0</math> أي ان : <math>d = 1</math> ومنه فان : معادلة ديكارتية للمستوى <math>(P)</math> .</p>
<p>1- ب. + لنحسب مسافة النقطة <math>\Omega(0,1,-1)</math> عن المستوى <math>(P)</math> : <math>x - z + 1 = 0</math> لدينا : <math>d(\Omega, (P)) = \frac{ x_\Omega - z_\Omega + 1 }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}</math> يعني : <math>d(\Omega, (P)) = \frac{ 0 - (-1) + 1 }{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}}</math> أي : <math>d(\Omega, (P)) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}</math> وبما ان شعاع الفلكة <math>(S)</math> هو : <math>R = \sqrt{2}</math> وان : <math>d(\Omega, (P)) = \sqrt{2}</math> أي : <math>d(\Omega, (P)) = R = \sqrt{2}</math> فان : المستوى <math>(P)</math> مماس للفلكة <math>(S)</math> . + لنتحقق من ان النقطة <math>B(-1,1,0)</math> هي نقطة تماس <math>(P)</math> و <math>(S)</math> ▪ لنتحقق من كون <math>B \in (P)</math> : <math>-1 - 0 + 1 = 0</math> : اذن : <math>B \in (P)</math> ▪ لنتحقق من كون <math>B \in (S)</math> : لدينا مركز الفلكة <math>(S)</math> هو <math>\Omega(0,1,-1)</math> وشعاعها <math>R = \sqrt{2}</math> أي ان : <math>(S)</math> : <math>(x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z - (-1))^2 = \sqrt{2}^2 = 2</math> أي ان : <math>(S)</math> : <math>x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 2</math> ولدينا : <math>(-1)^2 + (1 - 1)^2 + (0 + 1)^2 = 2 = 2</math> : اذن : <math>B \in (S)</math> ومنه فان : النقطة <math>B(-1,1,0)</math> هي نقطة تماس <math>(P)</math> و <math>(S)</math> .</p>
<p>2 - أ. لدينا : المستقيم <math>(\Delta)</math> يمر من النقطة <math>A(0,1,1)</math> وبما ان : <math>(\Delta) \perp (P)</math> فان : <math>\vec{u}(1,0,-1)</math> متجهة موجهة للمستقيم <math>(P)</math> فان : <math>\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 0t \\ z = 1 - 1t \end{cases}</math> ; <math>(t \in \mathbb{R})</math> تمثيل بارامتري للمستقيم <math>(\Delta)</math> .</p>
<p>2- ب. ولدينا : <math>d(\Omega, (\Delta)) = \frac{\ \vec{\Omega A} \wedge \vec{n}\ }{\ \vec{n}\ } = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = R</math> ومنه <math>(\Delta)</math> مماس للفلكة <math>(S)</math> لدينا : <math>(S)</math> : <math>x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 2</math> و <math>C(1,1,0)</math> وبما ان : <math>1^2 + (1 - 1)^2 + (0 + 1)^2 = 2 = 2</math> فان : <math>C \in (S)</math> ولدينا من جهة أخرى : <math>(\Delta)</math> : <math>\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 0t \\ z = 1 - 1t \end{cases}</math> و أي : <math>\begin{cases} 1 = 0 + 1t \\ 1 = 1 + 0t \\ 0 = 1 - 1t \end{cases}</math> ومنه : <math>C \in (\Delta)</math> وبالتالي <math>(\Delta)</math> مماس للفلكة <math>(S)</math> في النقطة <math>C(1,1,0)</math></p>
<p>3 - حساب <math>\vec{OC} \wedge \vec{OB}</math></p>

$$\vec{OC} \wedge \vec{OB} = 2\vec{k} : \text{اذن } \vec{OC} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

+ حساب مساحة المثلث OCB

$$S_{OCB} = 1 : \text{اذن } S_{OCB} = \frac{|\vec{OC} \wedge \vec{OB}|}{2} = \frac{2}{2}$$

التمرين الثاني :

$$1. \text{ لدينا : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \quad \text{و} \quad p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{4}{56} = \frac{1}{7}$$

$$2. \text{ أ- لدينا : } p(X=16) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

ب- 2

القيم التي يأخذها  $X$  :  $X(\Omega) = \{0, 4, 8, 16\}$

$$\text{لدينا : } p(X=0) = 1 - p(\overline{X=0}) = 1 - \frac{C_6^3}{C_8^3} = 1 - \frac{20}{56} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$$

$$\text{و} \quad p(X=4) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

$$\text{و} \quad p(X=8) = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

$$\text{و} \quad p(X=16) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28} \quad (\text{حسب نتيجة السؤال السابق})$$

وبالتالي :

$X = x_i$	0	4	8	16
$p(X = x_i)$	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

التمرين الثالث :

$$1. \text{ أ- لدينا : } (1+i)a = (1+i) \cdot (\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}+i + \sqrt{3}i - 1 = \sqrt{3}-1 + i(\sqrt{3}+1) = b$$

$$\text{اذن : } b = (1+i)a$$

$$1. \text{ ب- لدينا : } b = (1+i)a \quad \text{يعني : } |b| = |(1+i)a| = |1+i| \times |a| = \sqrt{1^2+1^2} \times \sqrt{3^2+1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{لدينا : } \arg b \equiv \arg[(1+i)a] \equiv \arg(1+i) + \arg(a)$$

$$\text{و لدينا : } 1+i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{أي أن : } \arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{و : } a = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{أي أن : } \arg(a) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\text{وبالتالي : } \arg b \equiv \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) [2\pi] \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$$

$$1. \text{ ج- لدينا : } b = \sqrt{3}-1 + (\sqrt{3}+1)i \quad \text{و} \quad |b| = 2\sqrt{2} \quad \text{يعني : } b = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{يعني : } b = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) \quad \text{وبمأن : } \arg b \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi] \quad \text{فان : } \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$2. \text{ أ- لدينا : } ia = i \cdot (\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}i + i^2 = -1 + \sqrt{3}i \quad \text{اذن : } c = ia$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |c| = |a| \\ \arg \frac{c}{a} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right\} : \text{يعني} \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{c}{a} \right| = 1 \\ \frac{c}{a} = 1 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \end{array} \right. : \text{يعني أن } \frac{c}{a} = i : \text{لدينا } c = ia$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OC} \\ (\overline{OA}, \overline{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right\} : \text{اذن} \left\{ \begin{array}{l} |c - o| = |a - o| \\ \arg \frac{c - o}{a - o} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right\} : \text{يعني}$$

2-ب تذكران : ليكن  $z$  لحق نقطة  $M$  من المستوى العقدي و  $z'$  لحق النقطة  $M'$  صورة  $M$  بالازاحة  $T$  التي متجهتها  $\overline{OC}$ . يعني :  $T(M) = M' \Leftrightarrow \overline{MM'} = \overline{OC} \Leftrightarrow z' - z = c$

لدينا : + لحق المتجهة  $\overline{OC}$  هو :  $\text{Aff}(\overline{OC}) = c = ia$

+ لحق المتجهة  $\overline{AB}$  هو :  $\text{Aff}(\overline{AB}) = b - a = (1 + i) \cdot a - a = ia$

اذن :  $\overline{AB} = \overline{OC}$  أي  $b - a = c$

ومنه فان : النقطة  $B$  هي صورة النقطة  $A$  بالازاحة التي متجهتها  $\overline{OC}$ .

2-ج لدينا :  $B$  هي صورة النقطة  $A$  بالازاحة التي متجهتها  $\overline{OC}$  يعني :  $\overline{AB} = \overline{OC}$

أي ان :  $OABC$  متوازي أضلاع

وبما أن :  $OA = OC$  وان :  $(\overline{OA}, \overline{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  (حسب نتيجة السؤال 2أ)

فان :  $OABC$  مربع.

المسألة :

I 1- لدينا :  $g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$  و :  $D_g = ]0, +\infty[$  و :  $1 \in ]0, +\infty[$

يعني :  $g(1) = 1^2 + 1 - 2 + 2 \ln 1$  اذن :  $g(1) = 0$

2- ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0, +\infty[$  ، يعني :  $x \in ]0, 1[$  أو  $x \in ]1, +\infty[$

■ اذا كان :  $x \in ]0, 1[$  لدينا  $x \leq 1$  وبما أن  $g$  تزايدية حسب جدول التغيرات فان :  $g(x) \leq g(1)$

ومنه فان :  $\forall x \in ]0, 1[ \quad g(x) \leq 0$

■ اذا كان :  $x \in ]1, +\infty[$  لدينا  $x \geq 1$  وبما أن  $g$  تزايدية حسب جدول التغيرات فان :  $g(x) \geq g(1)$

ومنه فان :  $\forall x \in ]1, +\infty[ \quad g(x) \geq 0$

II 1- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$

وبما أن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{2}{x} = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

فان :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

بما ان  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  فان : المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  مقارب عمودي للمنحنى  $(C)$  على يمين 0.

2- أ- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln x - 2 \frac{\ln x}{x}$

وبما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فان :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2-ب لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln x}{x} - 2 \frac{\ln x}{x^2}$  وبما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

فان :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

ولدينا من جهة اخرى :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{2}{x}) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 2 \frac{\ln x}{x}$

وبما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فان :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$

ومنه فان : المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه المستقيم (D) ذو المعادلة  $y = x$  بجوار  $+\infty$

3-أ. ليكن  $x$  عنصراً من المجال  $]0, +\infty[$  ، ولدينا :  $f(x) = x + (1 - \frac{2}{x}) \ln x$

اذن :  $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} \ln x + (1 - \frac{2}{x}) \cdot \frac{1}{x}$  يعني :  $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} \ln x + \frac{x-2}{x^2}$

يعني :  $f'(x) = \frac{x^2 + x - 2 + 2 \ln x}{x^2}$  اذن :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$   $\forall x \in ]0, +\infty[$

3-ب. لدينا :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$   $\forall x \in ]0, +\infty[$  و  $x^2 > 0$  :  $\forall x \in ]0, +\infty[$

اذن إشارة  $f'$  هي نفسها إشارة  $g(x)$  لكل  $x \in ]0, +\infty[$

وحسب نتيجة السؤال (2-أ) :

لدينا :  $g(x) \leq 0$   $\forall x \in ]0, 1[$  ومنه :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \leq 0$  اذن :  $f$  تناقصية على  $]0, 1[$

ولدينا :  $g(x) \geq 0$   $\forall x \in ]1, +\infty[$  ومنه :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \geq 0$  اذن :  $f$  تزايدية على  $]1, +\infty[$

3-ج

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

4-أ. لدينا :  $(1 - \frac{2}{x}) \ln x = 0$  يعني :  $\ln x = 0$  أو  $1 - \frac{2}{x} = 0$  يعني :  $x = 1$  أو  $x = 2$

اذن مجموعة حلول المعادلة  $(1 - \frac{2}{x}) \ln x = 0$  على المجال  $]0, +\infty[$  هي :  $S = \{1, 2\}$

لاحظ ان :  $1 \in ]0, +\infty[$  وان :  $2 \in ]0, +\infty[$

4-ب. لدينا :  $f(x) = x$  يعني :  $(1 - \frac{2}{x}) \ln x = 0$  يعني :  $x = 1$  أو  $x = 2$

ومنه المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين هما :  $M(1, 1)$  و  $N(2, 2)$

4-ج. لدينا :  $f(x) - x = (1 - \frac{2}{x}) \ln x = \frac{x-2}{x} \cdot \ln x$  ;  $\forall x \in ]0, +\infty[$

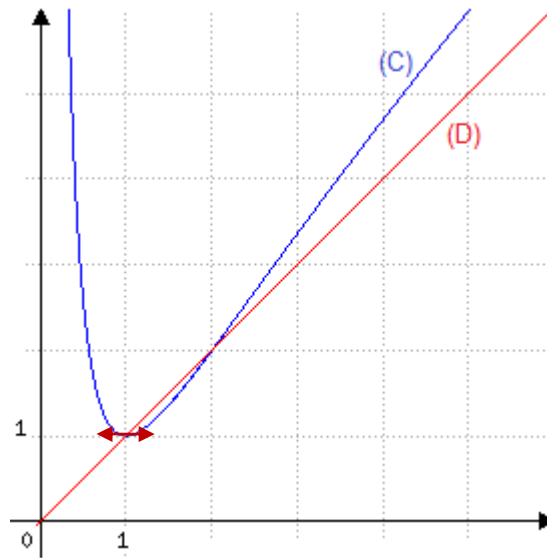
وبما أن :  $\forall x \in [1, 2]$   $\ln x \geq 0$  و  $\forall x \in [1, 2]$   $x - 2 \leq 0$  و  $\forall x \in [1, 2]$   $x \geq 0$

فان :  $\forall x \in [1, 2]$   $\frac{x-2}{x} \cdot \ln x \leq 0$  أي ان :  $\forall x \in [1, 2]$   $f(x) - x \leq 0$

وبالتالي فان :  $\forall x \in [1, 2]$   $f(x) \leq x$

بما أن  $\forall x \in [1,2] f(x) \leq x$  فإن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال  $[1,2]$

5- تمثيل المنحنى (C) والمستقيم (D) في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  حيث  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1cm$



$$6-أ. \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \ln x \cdot dx = \left[ \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\ln 2)^2$$

6-ب. لدينا  $H(x) = 2 \ln x - x$  و  $h(x) = \frac{2}{x} - 1$

لدينا  $H$  دالة متصلة على المجال  $]0, +\infty[$  (لأنها مجموع دوال متصلة على  $]0, +\infty[$ )

ولدينا  $H'(x) = h(x)$  : يعني  $H'(x) = (2 \ln x - x)' = \frac{2}{x} - 1$

اذن  $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على المجال  $]0, +\infty[$ .

$$6-ج. لدينا : \int_1^2 \left( \frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = \left[ (2 \ln x - x) \cdot \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2 \ln x - x}{x} dx = (2 \ln 2 - 2) \cdot \ln 2 - 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx + [x]_1^2$$

$$\int_1^2 \left( \frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = 2(\ln 2)^2 - 2 \ln 2 - (\ln 2)^2 + 1 = (\ln 2)^2 - 2 \ln 2 + 1$$

يعني :

$$\int_1^2 \left( \frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = (\ln 2 - 1)^2 = (1 - \ln 2)^2$$

اذن :

6د- لتكن  $\mathcal{A}$  مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين

معادلتاهما  $x=1$  و  $x=2$ .

$$\text{لدينا : } \mathcal{A} = \int_1^2 |f(x) - x| dx$$

وحسب نتيجة السؤال (II-4-ج)  $\forall x \in [1,2] f(x) \leq x$  أي أن  $\forall x \in [1,2] f(x) - x \leq 0$

$$\text{أي ان : } \forall x \in [1,2] |f(x) - x| = -(f(x) - x) = \left( \frac{2}{x} - 1 \right) \cdot \ln x$$

$$\text{ومنه : } \mathcal{A} = \int_1^2 \left( \frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = (1 - \ln 2)^2 cm^2$$

III-1. بالنسبة لـ  $n=0$  لدينا  $u_0 = \sqrt{3}$  ومنه  $1 \leq u_0 \leq 2$  (العبارة صحيحة لأجل  $n=0$ )

نفترض أن  $1 \leq u_n \leq 2$  ونبين ان  $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

لدينا  $1 \leq u_n \leq 2$  أي أن  $u_n \in ]1, +\infty[ \subset ]1, 2[$  وبما أن  $f$  تزايدية على  $]1, +\infty[$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$

فان :  $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$  أي أن  $1 \leq u_{n+1} \leq 2$  (العبارة صحيحة لأجل  $n+1$ )

وبالتالي :  $1 \leq u_n \leq 2 ; \forall n \in \mathbb{N}$

2- لدينا حسب نتيجة السؤال (II-4-ج) :  $f(x) \leq x ; \forall x \in [1,2]$   
ولدينا من جهة أخرى :  $1 \leq u_n \leq 2 ; \forall n \in \mathbb{N}$  أي أن :  $u_n \in [1,2] ; \forall n \in \mathbb{N}$   
اذن :  $f(u_n) \leq u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$  يعني  $u_{n+1} \leq u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$   
وبالتالي فان المتتالية  $(u_n)$  تناقصية

3- + لدينا :  $1 \leq u_n \leq 2 ; \forall n \in \mathbb{N}$  يعني ان المتتالية  $(u_n)$  مصغورة بالعدد 1  
وبما أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية فانها متقاربة .  
+ لدينا  $f$  متصلة على المجال  $]0, +\infty[$  وبالخصوص على المجال  $[1,2]$   
و :  $f([1,2]) = [1,2]$  أي ان :  $f([1,2]) \subset [1,2]$  وبما أن  $(u_n)$  متقاربة و  $u_0 \in [1,2]$   
فان النهاية  $l$  للمتتالية  $(u_n)$  تحقق :  $f(l) = l$   
وحسب نتيجة السؤال (II-4-ب) :  $l = 1$  أو  $l = 2$   
وبما أن  $(u_n)$  تناقصية فان :  $u_n \leq u_0 ; \forall n \in \mathbb{N}$  أي :  $u_n \leq \sqrt{3} ; \forall n \in \mathbb{N}$  أي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \sqrt{3}$   
وبالتالي فان :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

[Phy.handa@gmail.com](mailto:Phy.handa@gmail.com)

GSM : 0661931283