

تصحيح وطني 2019

الدورة الاستدرائية - علوم تجريبية

التمرين الأول (3 نقاط) :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1, 2, 2)$ و $B(3, -1, 6)$ و $C(1, 1, 3)$	
(1) أ) تحقق أن $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$	0.75
ب) استنتج أن $x - 2y - 2z + 7 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوى (ABC)	0.5
(2) نعتبر النقطتين $E(5, 1, 4)$ و $F(-1, 1, 12)$ و M التي تحقق $\vec{ME} \cdot \vec{MF} = 0$	0.75
بين أن المجموعة (S) فلكة مركزها هو النقطة $\Omega(2, 1, 8)$ و شعاعها $R = 5$	
(3) أ) أحسب $d(\Omega, (ABC))$ مسافة النقطة Ω عن المستوى (ABC)	0.5
ب) استنتج أن المستوى ABC يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $r = 4$	0.5

التمرين الثاني (3 نقاط) :

(1) أ) حل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة $z^2 - 3z + 3 = 0$	0.75
ب) نضع $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، أكتب a على الشكل المثلثي	0.5
(2) نعتبر العدد العقدي $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ، تحقق أن $b^2 = i$	0.5
(3) نضع $h = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$ ، بين أن $h^4 + 1 = a$	0.5
(4) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) ، نعتبر النقطة B التي لحقها b و R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$	
أ) ليكن c لحق النقطة C صورة النقطة B بالدوران R ، بين أن $c = ib$	0.5
ب) استنتج طبيعة المثلث OBC	0.25

التمرين الثالث (3 نقاط) :

يحتوي صندوق على كرة واحدة حمراء و كرتين بيضاوين و ثلاث كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 3 كرات من الصندوق . لتكن الأحداث التالية : A " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون " و B " لا توجد أي كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة " و C " توجد كرتان بيضاوان بالضبط من بين الكرات المسحوبة "	
(1) بين أن : $p(A) = \frac{1}{6}$ و $p(B) = \frac{8}{27}$	2

المسألة (11 نقطة) :

الجزء الأول:

لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي: $f(x) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

و C المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (الوحدة 1cm)

(1) أ) تحقق أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و أول النتيجة هندسيا

0.5

ب) تحقق أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ و أول النتيجة هندسيا

0.5

(2) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0.5

ب) بين أن المنحنى C يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه المقارب محور الأرتيب بجوار $+\infty$

0.5

(3) أ) بين أن لكل x من \mathbb{R}^* ، $f'(x) = \frac{8x-2}{x^3} x^2 - 2x + 4 e^{x-4}$

0.75

ب) تحقق أن لكل x من \mathbb{R} ، $x^2 - 2x + 4 > 0$

0.25

ج) بين أن f تناقصية قطعاً على المجال $0, 2$ و تزايدية قطعاً على كل من المجالين $-\infty, 0$ و $2, +\infty$

0.75

د) ضع جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R}^*

0.5

(4) أنشئ المنحنى C في المعلم O, \vec{i}, \vec{j}

1

(5) أ) تحقق أن الدالة $H: x \mapsto \frac{1}{x} e^{x-4}$ دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto \frac{x-1}{x^2} e^{x-4}$ على المجال $2, 4$

0.5

ب) تحقق من أن $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32 \frac{x-1}{x^2} e^{x-4}$

0.25

ج) أحسب التكامل $\int_2^4 e^{x-4} dx$

0.5

د) أحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى C و محور الأفاصيل و المستقيمين

0.75

الذين معادلتهما

$x=4$ و $x=2$

الجزء الثاني:

(1) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $2, 4$ بما يلي: $g(x) = 8x - 2e^{x-4} - x^2$

أ) أحسب $g(4)$

0.25

ب) تحقق أن لكل x من المجال $2, 4$ ، $g(x) = -x - 4e^{x-4} + x^2 e^{x-4} - 1$

0.5

ج) تحقق أن لكل x من المجال $2, 4$ ، $e^{x-4} - 1 \leq 0$ ثم استنتج أن لكل x من المجال $2, 4$: $g(x) \leq 0$

0.5

(2) أ) تحقق أن لكل x من المجال $2, 4$ ، $f(x) - x = \left(\frac{x-2}{x^2}\right) g(x)$

0.5

ب) استنتج أن لكل x من المجال $2, 4$ ، $f(x) \leq x$

0.25

(3) لتكن u_n المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من \mathbb{N}	
(أ) بين بالترجع أن لكل n من \mathbb{N} $2 \leq u_n \leq 4$	0.5
(ب) حدد رتبة المتتالية u_n ، ثم استنتج أنها متقاربة	0.5
(ج) أحسب نهاية المتتالية u_n	0.75



تصحيح التمرين الأول

(1) (أ) لدينا $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
إذن :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 1.\vec{i} - 2.\vec{j} - 2.\vec{k} \end{aligned}$$

و بالتالي : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

(ب) لدينا : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ متجهة منظمية للمستوى ABC

إذن معادلة ديكارتية للمستوى ABC تكتب على شكل : $1.x - 2.y - 2.z + d = 0$

ولدينا : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in ABC$

إذن : $1.1 - 2.2 - 2.2 + d = 0$

و منه : $d = 7$

نستنتج أن $x - 2y - 2z + 7 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى ABC

(2) لدينا S مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$

إذن S هي الفلكة التي أحد أقطارها EF

و بالتالي : Ω مركز الفلكة هو منتصف القطعة EF و شعاعها $R = \frac{EF}{2}$

$$\begin{cases} x_{\Omega} = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = 2 \\ y_{\Omega} = \frac{y_E + y_F}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1 \\ z_{\Omega} = \frac{z_E + z_F}{2} = \frac{4 + 12}{2} = 8 \end{cases}$$

$$R = \frac{EF}{2} = \frac{\sqrt{-1-5^2 + 1-1^2 + 12-4^2}}{2} = \frac{\sqrt{36+0+64}}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{و}$$

و منه : المجموعة S فلكة مركزها هو النقطة Ω 2,1,8 و شعاعها $R=5$

$$d \Omega, ABC = \frac{|2-2 \quad 1-2 \quad 8+7|}{\sqrt{1^2 + -2^2 + -2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3 \quad (3) \quad \text{أ}$$

ب) بما أن $d \Omega, ABC < R$ فإن المستوى ABC يقطع الفلكة S وفق دائرة Γ شعاعها r

$$r = \sqrt{R^2 - d \Omega, ABC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \quad \text{حيث :}$$

تصحيح التمرين الثاني

(1) أ) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - 3z + 3 = 0$

$$\Delta = -3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3 \quad \text{لدينا :}$$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين

$$z = \frac{-(-3) + i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-(-3) - i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \quad \text{و منه :}$$

$$a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{ب) لدينا :}$$

$$|a| = \left| \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3} \quad \text{معيار العدد } a \text{ هو :}$$

لنكتب العدد a على الشكل المثلثي:

$$a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$b^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 (1+i)^2 = \frac{2}{4} (1+2i-1) = \frac{4i}{4} = i \quad (2)$$

(3) حسب علاقة موافر :

$$h^4 = \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)^4 = \cos \frac{4\pi}{12} + i \sin \frac{4\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h^4 + 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = a$$

(4) أ) لدينا $\frac{\pi}{2}$: صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$
إذن :

$$c - 0 = e^{i\frac{\pi}{2}} b - 0$$

$$c = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) b$$

و منه : $c = ib$

$$R B = C \Leftrightarrow \begin{cases} OB = OC \\ \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \equiv \frac{\pi}{2} 2\pi \end{cases} \text{ (ب) لدينا :}$$

إذن المثلث OBC متساوي الساقين و قائم الزاوية في O

تصحيح التمرين الثالث

التجربة " نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 3 كرات من الصندوق ".
ليكن Ω كون إمكانيات التجربة

$$\text{لدينا : } \text{card}\Omega = 6^3 = 216$$

(1) A " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون "

$$RRR \quad N \quad NN \text{ و } BBi$$

$$\text{card}A = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$$

$$p A = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$$

B " لا توجد أي كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة "

$$\overline{BBB}$$

$$\text{card}B = 4^3 = 64$$

$$p B = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{64}{216} = \frac{8}{27}$$

(2) C " توجد كرتان بيضاوان بالضبط من بين الكرات المسحوبة "

$$\begin{cases} BBB \\ \overline{BBB} \\ \overline{\overline{BBB}} \end{cases}$$

$$cardC = \frac{3!}{2! \times 1!} 2^2 \times 4^1 = 48$$

$$p_C = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{48}{216} = \frac{2}{9}$$

تصحيح المسألة

الجزء الأول:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + 8 \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 e^{x-4} = 2 \quad (1) \text{ أ}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^4} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right. \text{ لأن :}$$

التأويل الهندسي: المنحنى C يقبل مقارباً أفقياً معادلته $y=2$ بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 + 8 \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 e^{x-4} = +\infty \quad (2) \text{ ب}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^{x-4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^4} = \frac{1}{e^4} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} x-2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+ \end{array} \right. \text{ لأن :}$$

التأويل الهندسي: المنحنى C يقبل مقارباً عمودياً معادلته $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + 8 \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 e^{x-4} = +\infty \quad (2) \text{ أ}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^4} = +\infty \end{array} \right. \text{ لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} + 8 \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 \frac{e^{x-4}}{x} = +\infty \quad (2) \text{ ب}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^4} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \right) \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

التأويل الهندسي:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{بما أن :}$$

فإن : المنحنى C يقبل فرعاً شلجيميا اتجاهه المقارب محور الأرتيب بجوار $+\infty$

(3) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $-\infty, 0$ و $0, +\infty$

ليكن $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2 + 8 \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 e^{x-4} \right)' \\ &= 0 + 8 \left(\left(\frac{x-2}{x} \right)^2 e^{x-4} \right)' \\ &= 8 \left(\left(\left(\frac{x-2}{x} \right)^2 \right)' e^{x-4} + \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 e^{x-4} \right)' \\ &= 8 \left(2 \left(\frac{x-2}{x} \right)' \left(\frac{x-2}{x} \right) e^{x-4} + \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 e^{x-4} \right) \\ &= 8 \left(2 \times \frac{2}{x^2} \left(\frac{x-2}{x} \right) e^{x-4} + \frac{(x-2)^2}{x^2} e^{x-4} \right) \\ &= \frac{8(x-2)}{x^2} e^{x-4} \left(\frac{4}{x} + x - 2 \right) \\ &= \frac{8(x-2)}{x^2} e^{x-4} \left(\frac{4 + x^2 - 2x}{x} \right) \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{8(x-2)(x^2 - 2x + 4)}{x^3} e^{x-4}, \quad \text{و منه لكل } x \text{ من } \mathbb{R}^*$$

(ب) ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - 2x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 = (x-1)^2 + 3$$

لدينا : إذن من الواضح أن : لكل x من \mathbb{R} ، $x^2 - 2x + 4 > 0$

(ج) ليكن $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{8x-2}{x^3} \cdot \frac{x^2-2x+4}{e^{x-4}} = \frac{8x^2-2x+4}{x^2} \times \frac{x-2}{x} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{x-2}{x} \text{ هي إشارة } f'(x) \text{ فإن إشارة } \frac{8x^2-2x+4}{x^2} > 0 \text{ : بما أن}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$x-2$	$-$		0	$+$	
x	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{x-2}{x}$	$+$		$-$	0	$+$

✓ على المجال $0, 2$: لدينا $f'(x) \leq 0$ و $x=2$ $\Leftrightarrow f'(x)=0$

إذن f تناقصية قطعاً

✓ على المجال $2, +\infty$: لدينا $f'(x) \geq 0$ و $x=2$ $\Leftrightarrow f'(x)=0$

إذن f تزايدية قطعاً

✓ على المجال $-\infty, 0$: لدينا $f'(x) > 0$

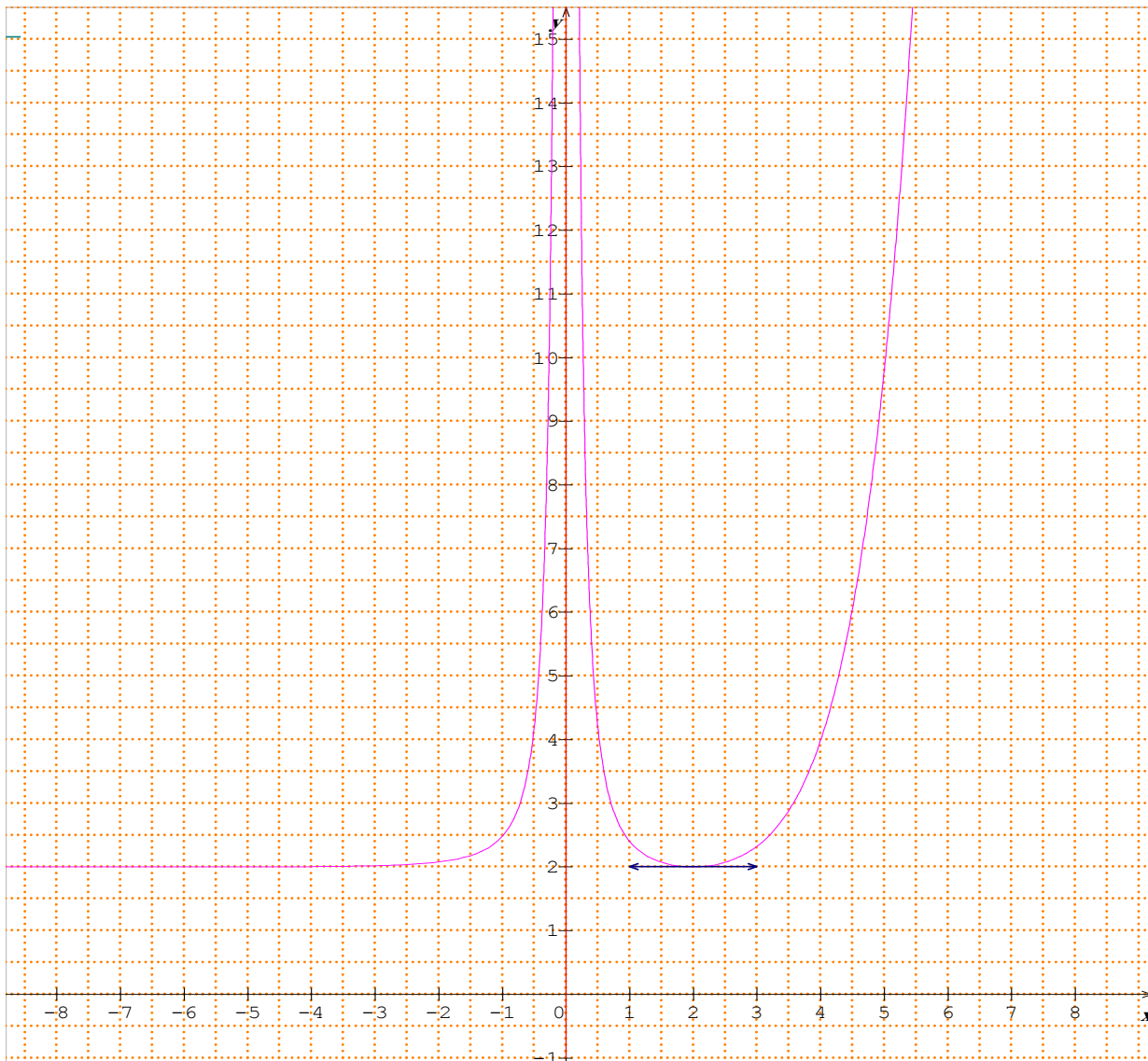
إذن f تزايدية قطعاً

(د) جدول تغيرات الدالة f على \mathbb{R}^*

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$

$2 \nearrow$ $2 \searrow$ $2 \nearrow$

(4)



(5 أ)

✓ الدالة $H: x \mapsto \frac{1}{x} e^{x-4}$ قابلة للاشتقاق على المجال 2,4 كجاء دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال 2,4

✓ ليكن $x \in 2,4$

لدينا

$$\begin{aligned}
H' x &= \left(\frac{1}{x} e^{x-4} \right)' \\
&= \left(\frac{1}{x} \right)' e^{x-4} + \frac{1}{x} e^{x-4}' \\
&= \frac{-1}{x^2} e^{x-4} + \frac{1}{x} x-4' e^{x-4} \\
&= \frac{-1}{x^2} e^{x-4} + \frac{1}{x} e^{x-4} \\
&= \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) e^{x-4} \\
&= \left(\frac{x-1}{x^2} \right) e^{x-4}
\end{aligned}$$

إذن $\forall x \in]2, 4[\quad H' x = h x$

وبالتالي : الدالة $H : x \mapsto \frac{1}{x} e^{x-4}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{x-1}{x^2} e^{x-4}$ على المجال $]2, 4[$

(ب)

$$\begin{aligned}
2 + 8e^{x-4} - 32 \frac{x-1}{x^2} e^{x-4} &= 2 + 8e^{x-4} \left(1 - 4 \frac{x-1}{x^2} \right) \\
&= 2 + 8e^{x-4} \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2} \right) \\
&= 2 + 8e^{x-4} \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 \\
&= 2 + 8e^{x-4} \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 \\
&= f x
\end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned}
\int_2^4 e^{x-4} dx &= \int_2^4 x-4' e^{x-4} dx \\
&= \left[e^{x-4} \right]_2^4 \\
&= e^0 - e^{-2} \\
&= 1 - \frac{1}{e^2} \\
&= \frac{e^2 - 1}{e^2}
\end{aligned}$$

(د)

$$\begin{aligned}
A &= \int_2^4 |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\
&= \int_2^4 f(x) dx \times 1cm \times 1cm \quad \forall x \in [2;4] \quad f(x) \geq 0 \\
&= \int_2^4 \left(2 + 8e^{x-4} - 32 \frac{x-1}{x^2} e^{x-4} \right) dx \cdot cm^2 \\
&= \left(\int_2^4 2 dx + 8 \int_2^4 e^{x-4} dx - 32 \int_2^4 \frac{x-1}{x^2} e^{x-4} dx \right) \cdot cm^2 \\
&= \left(2x \Big|_2^4 + 8 \frac{e^2 - 1}{e^2} - 32 \left[H(x) \right]_2^4 \right) \cdot cm^2 \\
&= \left(8 - 4 + 8 \frac{e^2 - 1}{e^2} - 32 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2e^2} \right) \right) \cdot cm^2 \\
&= \left(4 + 8 \frac{e^2 - 1}{e^2} - 8 + \frac{16}{e^2} \right) \cdot cm^2 \\
&= \left(-4 + 8 \frac{e^2 - 1}{e^2} + \frac{16}{e^2} \right) \cdot cm^2 \\
&= \left(\frac{-4e^2 + 8e^2 - 8 + 16}{e^2} \right) \cdot cm^2 \\
&= \frac{4e^2 + 8}{e^2} \cdot cm^2
\end{aligned}$$

الجزء الثاني:

(1) (أ)

$$\begin{aligned}
g(4) &= 8 \times 2e^0 - 4^2 \\
&= 16 - 16 \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ب)

ليكن $x \in [2;4]$

لدينا :

$$\begin{aligned}
-x^2 + 8x - 16 + x^2 e^{x-4} - x^2 &= -x^2 + 8x - 16 + x^2 e^{x-4} - x^2 \\
&= -x^2 + 8x - 16 + x^2 e^{x-4} - x^2 \\
&= 8x - 2x^2 + x^2 e^{x-4} \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

إذن : لكل x من المجال $2,4$ ، $g(x) = -x-4^2 e^{x-4} + x^2 e^{x-4} - 1$

(ج)

ليكن $x \in 2,4$

✓ لدينا $2 \leq x \leq 4$

إذن $-2 \leq x-4 \leq 0$

إذن $e^{x-4} \leq e^0$

إذن $e^{x-4} \leq 1$

و منه لكل x من المجال $2,4$ ، $e^{x-4} - 1 \leq 0$

✓ لدينا $g(x) = -x-4^2 e^{x-4} + x^2 e^{x-4} - 1$

بما أن $-x-4^2 e^{x-4} \leq 0$ و $x^2 e^{x-4} - 1 \leq 0$

فإن $-x-4^2 e^{x-4} + x^2 e^{x-4} - 1 \leq 0$

و منه لكل x من المجال $2,4$: $g(x) \leq 0$

(2) أ) ليكن $x \in 2,4$

لدينا

$$f(x) - x = 2 + 8 \frac{x-2^2}{x^2} e^{x-4} - x$$

$$= 8 \frac{x-2^2}{x^2} e^{x-4} - x - 2$$

$$= \frac{x-2}{x^2} 8(x-2) e^{x-4} - x^2$$

$$= \frac{x-2}{x^2} g(x)$$

إذن لكل x من المجال $2,4$ ، $f(x) - x = \left(\frac{x-2}{x^2} \right) g(x)$

(ب) ليكن $x \in 2,4$

لدينا $f(x) - x = \left(\frac{x-2}{x^2} \right) g(x)$

نعلم أن $x^2 > 0$ و $x-2 \geq 0$ و $g(x) \leq 0$

إذن $\left(\frac{x-2}{x^2} \right) g(x) \leq 0$

إذن $f(x) - x \leq 0$

و منه لكل x من المجال $2,4$ ، $f x \leq x$

(3) أ) لنبين بالترجع أن لكل n من \mathbb{N} $2 \leq u_n \leq 4$

✓ من أجل $n = 0$:

$$u_0 = 3 \text{ لدينا}$$

$$\text{إذن } 2 \leq u_0 \leq 4$$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

▷ نفترض أن : $2 \leq u_n \leq 4$

▷ و نبين أن : $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

حسب الافتراض لدينا $2 \leq u_n \leq 4$

و بما أن f متصلة و تزايدية على المجال $2,4$

$$\text{فإن } f 2 \leq f u_n \leq f 4$$

$$\text{إذن } 2 \leq u_{n+1} \leq 4$$

✓ نستنتج : أن لكل n من \mathbb{N} $2 \leq u_n \leq 4$

(ب)

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

نعلم أن لكل x من المجال $2,4$ ، $f x \leq x$

و بما أن $2 \leq u_n \leq 4$ فإن $f u_n \leq u_n$

$$\text{إذن لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n$$

و منه المتتالية u_n تناقصية

✓ بما أن u_n تناقصية و مصغرة بالعدد 2 فإن u_n متقاربة

(ج) لدينا $u_0 = 3 \in 2;4$ و $u_{n+1} = f u_n$ لكل n من \mathbb{N}

✓ f متصلة على المجال $2,4$

$$f 2,4 = [f 2 ; f 4] = 2;4 \quad \checkmark$$

✓ u_n متقاربة

إذن نهاية المتتالية u_n هي حل للمعادلة $f x = x$

$$f x = x \Leftrightarrow x - 2 g x = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad x \neq 0$$

بما أن u_n تناقصية فإن لكل n من \mathbb{N} $u_n \leq u_0$

إذن لكل n من \mathbb{N} : $u_n \leq 3$

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 3$

و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$



math.ma