

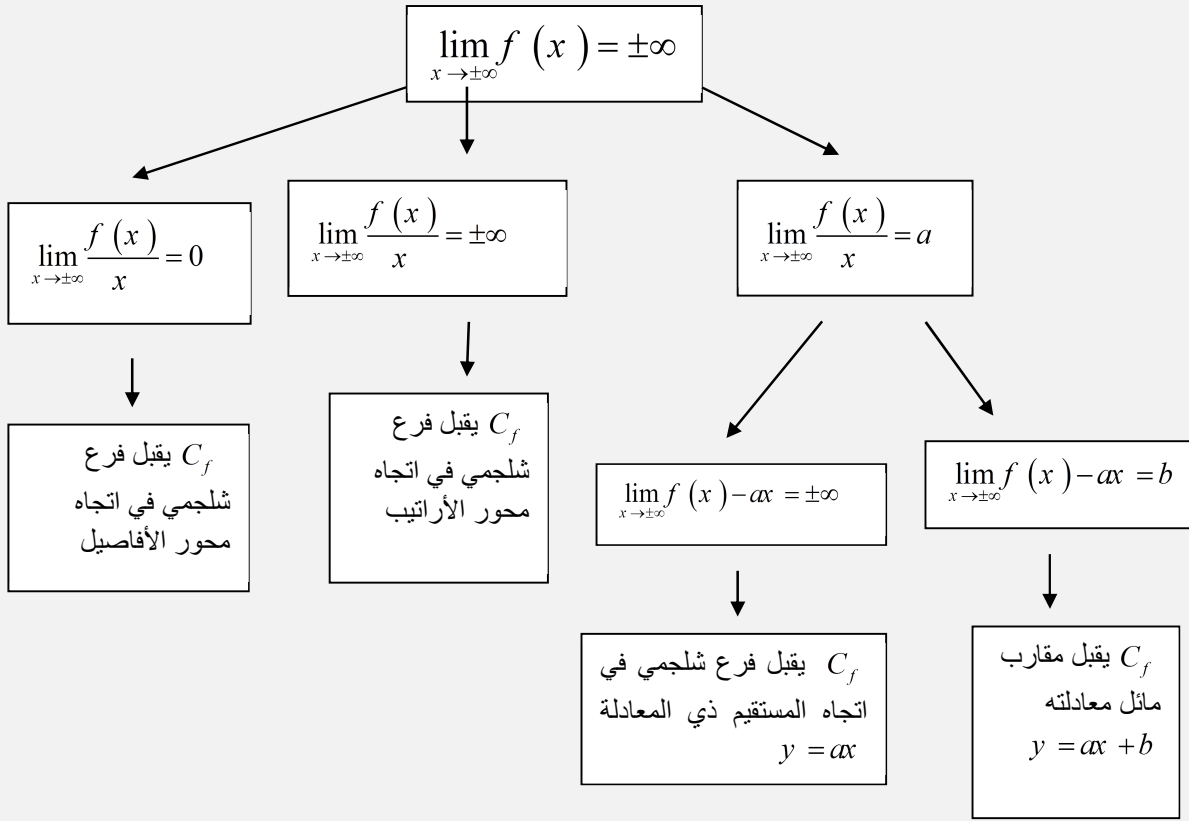
## أهم ما نحتاجه في دراسة الدوال

### أ. النهايات و الفروع اللانهائية

$$x = a \text{ يقبل مقارب عمودي معادلته } C_f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

$$-\infty \text{ بجوار } +\infty \text{ أو بجوار } y = b \text{ يقبل مقارب أفقي معادلته } C_f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$$

$$-\infty \text{ بجوار } +\infty \text{ أو بجوار } y = ax + b \text{ يقبل مقارب مائل معادلته } C_f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

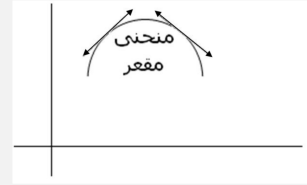


### ب. تقعر منحنى و نقط الانعطاف

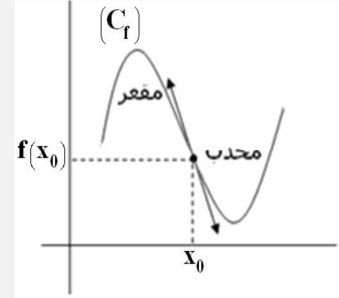
▪ إذا كان  $f''(x) \geq 0 \forall x \in I$  فإن  $(C_f)$  محدب



▪ إذا كان  $\forall x \in I \quad f''(x) \leq 0$  فإن  $(C_f)$  مقعر



▪ إذا كانت  $f''$  تنعدم و تغير إشارتها عند  $a$  فإن النقطة  $I(a, f(a))$  هي نقطة انعطاف  
▪ إذا كانت  $f'$  تنعدم و لا تغير إشارتها عند  $a$  فإن النقطة  $I(a, f(a))$  هي نقطة انعطاف



ج. مركز و محور تماثل  $(C_f)$

▪ المستقيم ذي المعادلة  $x = a$  محور تماثل ل  $(C_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f : f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

▪ النقطة  $\Omega(a, b)$  مركز تماثل ل  $(C_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f : f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$

د. اتصال دالة عددية

▪  $f$  متصلة في  $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

▪  $f$  متصلة في  $a$  على اليمين  $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$

▪  $f$  متصلة في  $a$  على اليسار  $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

▪  $f$  متصلة في  $a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

د. مبرهنة القيم الوسيطة

▪ مبرهنة القيم الوسيطة (وجودية الحل على  $[a, b]$ )

إذا كانت  $f$  متصلة على  $[a, b]$  و  $f(a) \times f(b) < 0$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا على الأقل في المجال  $]a, b[$

▪ مبرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية (وجودية ووحداية الحل على  $[a, b]$ )

إذا كانت  $f$  متصلة و رتيبة قطعاً على  $[a, b]$  و  $f(a) \times f(b) < 0$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً في المجال

$]a, b[$

▪ مبرهنة (وجودية ووحداية الحل على مجال  $I$ )

إذا كانت  $f$  متصلة ورتبية قطعاً على  $I$  و  $0 \in f(I)$  فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً في المجال  $I$

و. اتصال مركب دالتين

خاصية:

إذا كانت  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $g$  متصلة على مجال  $J$  بحيث  $f(I) \subset J$  فإن  $g \circ f$  متصلة على  $I$ .

ز. الدالة العكسية

خاصية: إذا كانت  $f$  دالة متصلة ورتبية قطعاً على

مجال  $I$  فإن المعادلة  $f(x) = y$  حيث  $y \in f(I)$  تقبل

حلاً وحيداً في المجال  $I$

الدالة التي تربط كل عدد  $y$  بالحل تسمى الدالة

العكسية للدالة  $f$  و نرمز لها بـ  $f^{-1}$

$$(1) \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \quad \text{نتائج:}$$

$$(2) \begin{cases} f^{-1} \circ f(x) = x & ; x \in I \\ f \circ f^{-1}(x) = x & ; x \in J \end{cases}$$

خصائص: لتكن  $f$  دالة و  $f^{-1}$  دالتها العكسية على

المجال  $J$  لدينا:

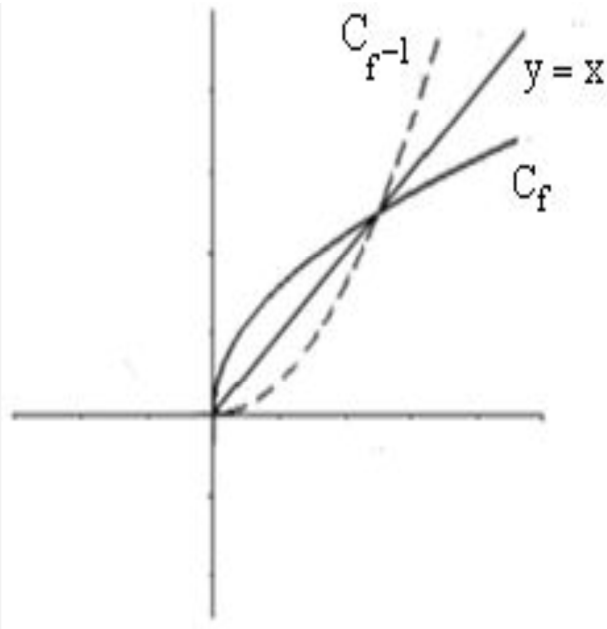
▪  $f^{-1}$  متصلة على المجال  $J$

▪  $f$  و  $f^{-1}$  لهما نفس الرتبة

▪ منحنى  $f^{-1}$  هو مماثل لمنحنى  $f$  بالنسبة

للمستقيم ذي المعادلة  $y = x$  (المنصف الأول

للمعلم)



ح. الإشتقاق

$(C_f)$  يقبل مماساً في النقطة

معامله الموجه  $A(a, f(a))$

: معادلته  $l = f'(a)$

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

$(C_f)$  يقبل مماساً في النقطة

معامله الموجه  $A(a, f(a))$

: معادلته  $l = f'_d(a)$

$$y = f'_d(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$$

$$l = f'(a)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$$

$$l = f'_d(a)$$

$f$  قابلة للاشتقاق في  $a$

$f$  قابلة للاشتقاق في  $a$  على اليمين

$(C_f)$  يقبل مماسا في النقطة

$A(a, f(a))$  معامل الموجه

: معادلته  $l = f'_g(a)$  و

$y = f'_g(a) \cdot (x - a) + f(a)$

$(C_f)$  يقبل مماسا في النقطة

$A(a, f(a))$  معامل الموجه

: معادلته  $l = f'(a)$  و

$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$$

$$l = f'_g(a)$$

$f$  قابلة للاشتقاق في  $a$  على اليسار

$f$  قابلة للاشتقاق في  $a$

$f$  قابلة للاشتقاق في  $a$  ✓

على اليمين

$f$  قابلة للاشتقاق في  $a$  ✓

على اليسار

$$f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a) \quad \checkmark$$

- إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في  $a$  على اليمين و  $f$  قابلة للاشتقاق في  $a$  على اليسار و  $f'_d(a) \neq f'_g(a)$  فإن  $f$  غير قابلة للاشتقاق في  $a$ . في هذه الحالة  $(C_f)$  يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة  $A(a, f(a))$  معاملاهما الموجهان  $f'_d(a)$  و  $f'_g(a)$  و النقطة  $A(a, f(a))$  تسمى نقطة مزواة
- إذا كانت  $f'(a) = 0$  فإن  $(C_f)$  يقبل مماس أفقي في  $A(a, f(a))$

$$f \text{ غير قابلة للاشتقاق في } a \text{ على اليمين} \Leftarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$$

$(C_f)$  يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة  $A(a, f(a))$

$$f \text{ غير قابلة للاشتقاق في } a \text{ على اليسار} \Leftarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$$

$(C_f)$  يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة  $A(a, f(a))$

$$f \text{ غير قابلة للاشتقاق في } a \text{ على اليمين} \Leftarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$$

$(C_f)$  يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة  $A(a, f(a))$

$$f \text{ غير قابلة للاشتقاق في } a \text{ على اليسار} \Leftarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$$

$(C_f)$  يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة  $A(a, f(a))$

المجال $I$	الدالة المشتقة $f'$	الدالة $f$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$x \mapsto k$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$

$I = ]-\infty, 0[$ أو $I = ]0, +\infty[$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$
$I = ]0, +\infty[$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$x \mapsto x^r \quad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$
$I = ]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$I = ]-\infty, 0[$ أو $I = ]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{-1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$x \mapsto \cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$

الدالة المشتقة	الدالة
$\alpha f'$	$\alpha f$
$f' + g'$	$f + g$
$f' \times g + f \times g'$	$f \times g$
$\frac{g'}{g^2}$	$\frac{1}{g}$
$\frac{f'g - fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g}$
$f' \times g \circ f$	$g \circ f$
$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt{f}$
$nf' f^{n-1}$	$f^n$

▪ ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$

$$(\forall x > 0) \quad (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x}^{n-1}}$$

▪ إذا كانت  $f$  دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  فإن  $\sqrt[n]{f}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و لدينا :

$$(\forall x \in I) \quad (\sqrt[n]{f(x)})' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)}^{n-1}}$$

▪ لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$  و ليكن  $x_0$  و  $y_0$  عدنان بحيث :  $f^{-1}(x_0) = y_0$

إذا كانت  $f'(y_0) \neq 0$  فإن  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  و لدينا  $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$

▪ إذا كانت  $f'$  لا تنعدم على  $I$  فإن  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق على  $f(I)$  و لدينا :

$$(\forall x \in f(I)) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

### رتابة دالة

- إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$  فإن  $f$  تزايدية على  $I$
- إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$  فإن  $f$  تناقصية على  $I$
- إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$  فإن  $f$  تزايدية قطعاً على  $I$
- إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$  فإن  $f$  تناقصية قطعاً على  $I$

### خاصية

- إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$  وكانت  $f'$  تنعدم في عدد منته من النقط على  $I$  فإن  $f$  تزايدية قطعاً على  $I$
- إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$  وكانت  $f'$  تنعدم في عدد منته من النقط على  $I$  فإن  $f$  تناقصية قطعاً على  $I$

### ط دالة اللوغاريتم النبيري

#### 1. تعريف:

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة  $x \mapsto \frac{1}{x}$  على المجال  $]0, +\infty[$  والتي تنعدم في 1 ويرمز لها بالرمز:

$\ln$

#### 2. استنتاجات وخصائص:

- $D_{\ln} = ]0, +\infty[$  ( $\ln(\geq 0)$ )
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$  ( $\forall x \in ]0, +\infty[$ ) إذن الدالة  $\ln$  تزايدية قطعاً على  $]0, +\infty[$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$
- $\forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x \leq \ln y \Leftrightarrow x \leq y$
- $\ln(1) = 0$
- يوجد عدد حقيقي وحيد من  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  نرمز له بـ  $e$  بحيث  $e \simeq 2,718$  و  $\ln(e) = 1$
- $\forall x > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$
- إشارة  $\ln x$ :

- إذا كان  $0 < x < 1$  فإن  $\ln x < 0$
- إذا كان  $x \geq 1$  فإن  $\ln x \geq 0$

#### 3. العمليات على الدالة $\ln$

ليكن  $x$  و  $y$  من  $]0, +\infty[$  و  $r \in \mathbb{Q}$  لدينا:

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \quad \blacksquare$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \blacksquare$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0^-$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

#### خاصية:

إذا كانت  $U$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  بحيث:

$$\forall x \in I \quad U(x) \neq 0$$

فإن الدالة  $x \mapsto \ln|U(x)|$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و

$$\forall x \in I \quad (\ln|U(x)|)' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

ملاحظة: إذا كانت  $U$  موجبة قطعاً:

$$(\ln(U(x)))' = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

نتيجة: مجموعة الدوال الأصلية للدالة  $x \mapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$

هي الدوال :  $(\lambda \in \mathbb{R}) \quad x \mapsto \ln|U(x)| + \lambda$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad \blacksquare$$

$$\ln(x^r) = r \ln(x) \quad \blacksquare$$

### ي. الدالة الأسية

أ. تعريف:

الدالة العكسية للدالة  $\ln$  تسمى الدالة الأسية النيبيرية و نرمز

لها ب :  $\exp$

ملاحظة:  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = e^x$

نتائج:

$$\begin{cases} e^x = y \\ (x \in \mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ (y > 0) \end{cases}$$

$\exp: \mathbb{R} \mapsto ]0, +\infty[$   
 $x \mapsto \exp(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}: e^x > 0$  و  $D_{\exp} = \mathbb{R}$

ليكن  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$  لدينا :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$

$$e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ln(e^x) = x$$

$$\forall x > 0: e^{\ln x} = x$$

$$e^1 = e \quad \text{و} \quad e^0 = 1 \quad \blacklozenge$$

ج. العمليات:

ليكن  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$  لدينا :

$$e^x \times e^y = e^{x+y} \quad (1)$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad (2)$$

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad (3)$$

$$(r \in \mathbb{Q}) \quad (e^x)^r = e^{rx} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ & \text{زوجي} \\ 0^- & \text{فردى} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(1) الدالة  $\exp$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و لدينا :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (e^x)' = e^x$$

(2) إذا كانت  $U$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  فإن

الدالة  $x \mapsto e^{U(x)}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و لدينا :

$$(\forall x \in I) \quad (e^{U(x)})' = U'(x) e^{U(x)}$$

$$(\forall x \in I) \quad (e^{rx})' = r e^{rx} \quad (3)$$

(4)

الأصلية	الدالة
$e^x$	$e^x$
$\frac{1}{e^{rx}}$	$e^{rx}$
$r$	
$e^{U(x)}$	$U'(x) e^{U(x)}$

ك. الدوال الأصلية

المجال $I$	الدوال الأصلية ل $f$ على $I$ معرفة بما يلي: $F(x) = \dots\dots$	$f$ دالة معرفة على المجال $I$ بما يلي: $f(x) = \dots\dots$
$\mathbb{R}$	$kx+c$	$k$ ( $k$ عدد حقيقي ثابت)
$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$x^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )
$]0, +\infty[$ أو $] -\infty, 0[$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$x^n$ ( $n \neq -1; n \in \mathbb{Z}^*$ )
$]0, +\infty[$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$x^r$ ( $r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$ )
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$\left] \frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[ , (k \in \mathbb{Z})$	$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$	$(a \neq 0), \cos(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$\frac{-1}{a} \cos(ax+b) + c$	$(a \neq 0), \sin(ax+b)$
$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + c$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$]0, +\infty[$ أو $] -\infty, 0[$	$\frac{-1}{x} + c$	$\frac{1}{x^2}$
$]0, +\infty[$	$\ln(x) + c$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$e^x + c$	$e^x$

شروط على $u$	الدوال الأصلية ل $f$ على $I$	الدالة $f$
	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$	$(n \in \mathbb{N}^*) u' u^n$
لكل $x$ من $I$ , $u(x) \neq 0$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$	$(n \neq -1; n \in \mathbb{Z}^*) u' u^n$
لكل $x$ من $I$ , $u(x) > 0$	$2\sqrt{u} + c$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
لكل $x$ من $I$ , $u(x) > 0$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1} + c$	$(r \in \mathbb{Q} - \{-1\}) u' u^r$
لكل $x$ من $I$ , $u(x) \neq 0$	$\ln( u ) + c$	$\frac{u'}{u}$
لكل $x$ من $I$	$e^u + c$	$u' e^u$



## ن. حساب التكامل

### 1. تعريف:

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $[a, b]$  و  $F$  دالة أصلية لها على  $[a, b]$ .  
تكامل  $f$  من  $a$  إلى  $b$  هو العدد الحقيقي :  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

### 2. ملاحظات:

- نكتب  $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$
- يمكن تغيير  $x$  بأي متغير آخر مثلا :  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots\dots\dots$

### 3. خاصيات:

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

### 4. خطانية التكامل:

#### خاصية:

لتكن  $f$  و  $g$  دالتان متصلتان على المجال  $[a, b]$ . لدينا :

- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- $(\alpha \in \mathbb{R}) \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$

#### 1. خاصية:

لتكن  $f$  و  $g$  دالتان متصلتان على المجال  $[a, b]$ . لدينا :

- إذا كانت  $f \geq 0$  على  $[a, b]$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- إذا كانت  $f \leq 0$  على  $[a, b]$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \leq 0$
- إذا كانت  $f \leq g$  على  $[a, b]$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

### 2. القيمة المتوسطة:

#### تعريف و خاصية:

▪ لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $[a, b]$ . العدد  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  يسمى القيمة المتوسطة ل

$f$  على  $[a, b]$

يوجد على الأقل عدد  $c$  من  $[a, b]$  بحيث :  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

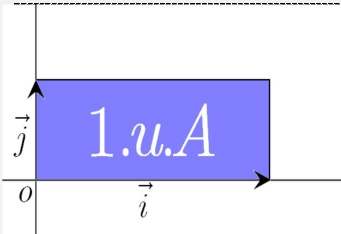
ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء:

#### خاصية:

لتكن  $u$  و  $v$  دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال  $I$  حيث  $u'$  و  $v'$  متصلتان على  $I$  و  $a$  و  $b$  عنصرين من  $I$  لدينا :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

I. حساب المساحات :



ليكن المستوى منسوباً إلى معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$   
وحدة المساحة  $u.A$  هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة  $O$   
المتجهتين  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$   
 $1u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

خاصية 1: لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $[a, b]$

مساحة الحيز المحصور بين  $(C_f)$  و محور الأفاصل و المستقيمين اللذين معادلتهما  $x = a$  و  $x = b$  هي :

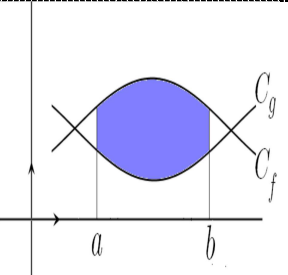
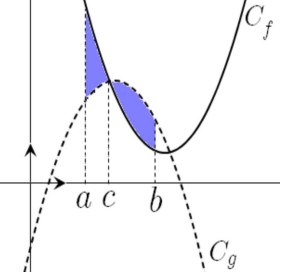
$$\left( \int_a^b |f(x)| dx \right) u.A$$

خاصية 2: لتكن  $f$  و  $g$  دالتان متصلتان على المجال  $[a, b]$

مساحة الحيز المحصور بين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  و محور الأفاصل و المستقيمين اللذين معادلتهما  $x = a$  و  $x = b$  هي :

$$\left( \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) u.A$$

مساحة الحيز الملون في الرسم هي:	ملاحظات	رسم توضيحي
$\left( \int_a^b f(x) dx \right) u.A$	$f$ موجبة على المجال $[a, b]$	
$\left( \int_a^b -f(x) dx \right) u.A$	$f$ سالبة على المجال $[a, b]$	
$\left( \int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx \right) u.A$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f</math> موجبة على المجال <math>[a, c]</math></li> <li>و</li> <li>• <math>f</math> سالبة على المجال <math>[c, b]</math></li> </ul>	

$\left( \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right) u.A$	<p><math>(C_f)</math> يوجد فوق <math>(C_g)</math> على المجال <math>[a, b]</math></p>	
$\left( \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx \right) u.A$	<p>• <math>(C_f)</math> يوجد فوق <math>(C_g)</math> على المجال <math>[a, c]</math> و • <math>(C_f)</math> يوجد تحت <math>(C_g)</math> على المجال <math>[c, b]</math></p>	

### I. حساب الحجم :

#### خاصية 1:

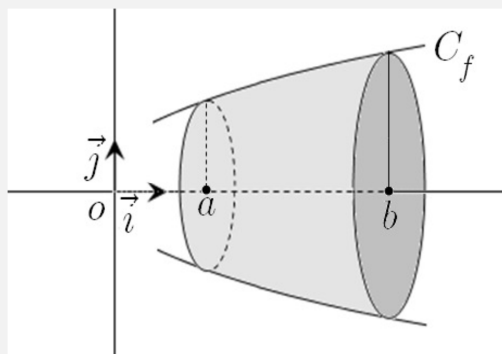
ليكن  $(\Sigma)$  مجسما محصورا بين المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  اللذين معادلتهما على التوالي:  $z = a$  و  $z = b$  ( $a < b$ )  
و لتكن  $S(t)$  مساحة تقاطع المجسم  $(\Sigma)$  مع المستوى الذي معادلته  $z = t$  حيث  $a \leq t \leq b$   
إذا كانت الدالة:  $t \mapsto S(t)$  متصلة على المجال  $[a, b]$  فإن  $V$  حجم المجسم  $(\Sigma)$  هو  $V = \int_a^b S(t) dt$  بوحدة قياس  
الحجم

#### خاصية 2:

حجم المجسم المولد بدوران  $(C_f)$  حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال  $[a, b]$  هو :

$$V = \left[ \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right] u.v$$

حيث:  $u.v$  : وحدة الحجم



つづく