



.01

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على ب : $f(x) = -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ (C) منحنى f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

...01

أ- حدد : D مجموعة تعريف الدالة f .
لدينا :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x+1 > 0 \\ \Leftrightarrow x > -1$$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f $D_f =]-1; +\infty[$

ب- احسب : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة الثانية .
لدينا :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}} = -\infty ; \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1}} = 0 \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}} = +\infty ; \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = 0^+ \right)$$

• التأويل الهندسي للنتيجة الثانية : منحنى الدالة يقبل مقارب عمودي هو المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $x = -1$: (Δ) .

ج- نبين أن (C) يقبل مقارب مائل (Δ) بجوار $+\infty$ يتم تحديد معادلته .
لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ إذن (C) يقبل فرع اللانهائي بجوار $+\infty$

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}} - (-x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1}} = 0$$

و منه المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل ل (C) بجوار $+\infty$

د- ندرس الوضع النسبي ل (C) و (Δ) .

$$\text{لدينا : } f(x) - (-x) = -x + \frac{2}{\sqrt{x+1}} - (-x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} > 0$$

و منه : المنحنى (C) يوجد فوق المقارب المائل .

...02

أ- نحسب f' الدالة المشتقة ل f على D ثم حدد إشارتها .

$$f'(x) = \left[-x + \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right]' = -1 + 2 \times (\sqrt{x+1})' \times \frac{-1}{\sqrt{x+1}^2}$$

$$= -1 - 2 \times \frac{1}{\sqrt{x+1}} \times \frac{1}{x+1} \quad \text{لدينا :}$$

$$= -\frac{(x+1)\sqrt{x+1}+2}{(x+1)\sqrt{x+1}} < 0 ; (x+1 > 0)$$



ب- نضع جدول لتغيرات الدالة f .

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

ج- أوجد معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في $x_0 = 0$.
لدينا:

$$y = (x - x_0)f'(x_0) - f(x_0) ; (x_0 = 0)$$

$$= -3x + 2 ; (f'(0) = -3 ; f(0) = 0)$$

خلاصة: معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في $x_0 = 0$ هي: $y = -3x + 2$ (T)

03. بين أن المعادلة: $f(x) = x$; $x \in]-1; +\infty[$ تقبل حل وحيد α حيث $0 < \alpha < \frac{3}{2}$.

نعتبر الدالة: $g(x) = f(x) - x$

• الدالة g هي متصلة على $]-1; +\infty[$ (لأنها مجموع دالتين متصلتين) إذن هي متصلة على $\left[0; \frac{3}{2}\right]$.

• الدالة g هي قابلة للاشتقاق على $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ مع $(f'(x) < 0)$; $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$.

$$g(0) \times g\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \left(\frac{-25 + 4\sqrt{10}}{10} \right) \approx 2 \times (-1,74) < 0$$

ومنه: يوجد عدد وحيد $\alpha \in \left]0; \frac{3}{2}\right[$ حيث $g(\alpha) = 0$ أي $f(\alpha) - \alpha = 0$ أي $f(\alpha) = \alpha$

و بالتالي المعادلة: $f(x) = x$; $x \in]-1; +\infty[$ تقبل حل وحيد α حيث $0 < \alpha < \frac{3}{2}$

خلاصة: المعادلة: $f(x) = x$; $x \in]-1; +\infty[$ تقبل حل وحيد α حيث $0 < \alpha < \frac{3}{2}$.

04. أنشئ المنحنى الممثل للدالة f والمستقيم (Δ) و المماس (T) في المعلم $(0, \bar{i}, \bar{j})$.

(أنظر آخر التمرين)

05. ...

أ- نبين أن f تحقق تقابل من $]-1; +\infty[$ إلى مجال J يتم تحدهه نضع f^{-1} الدالة العكسية ل f .

• الدالة f هي متصلة على $]-1; +\infty[$ (لأنها مجموع دالتين متصلتين).

• الدالة f تناقصية قطعاً على $]-1; +\infty[$.

• ومنه: الدالة f تقابل من $]-1; +\infty[$ إلى $J = f(]-1; +\infty[) = \mathbb{R}$

ب- نبين أن: f^{-1} قابلة للاشتقاق على J .

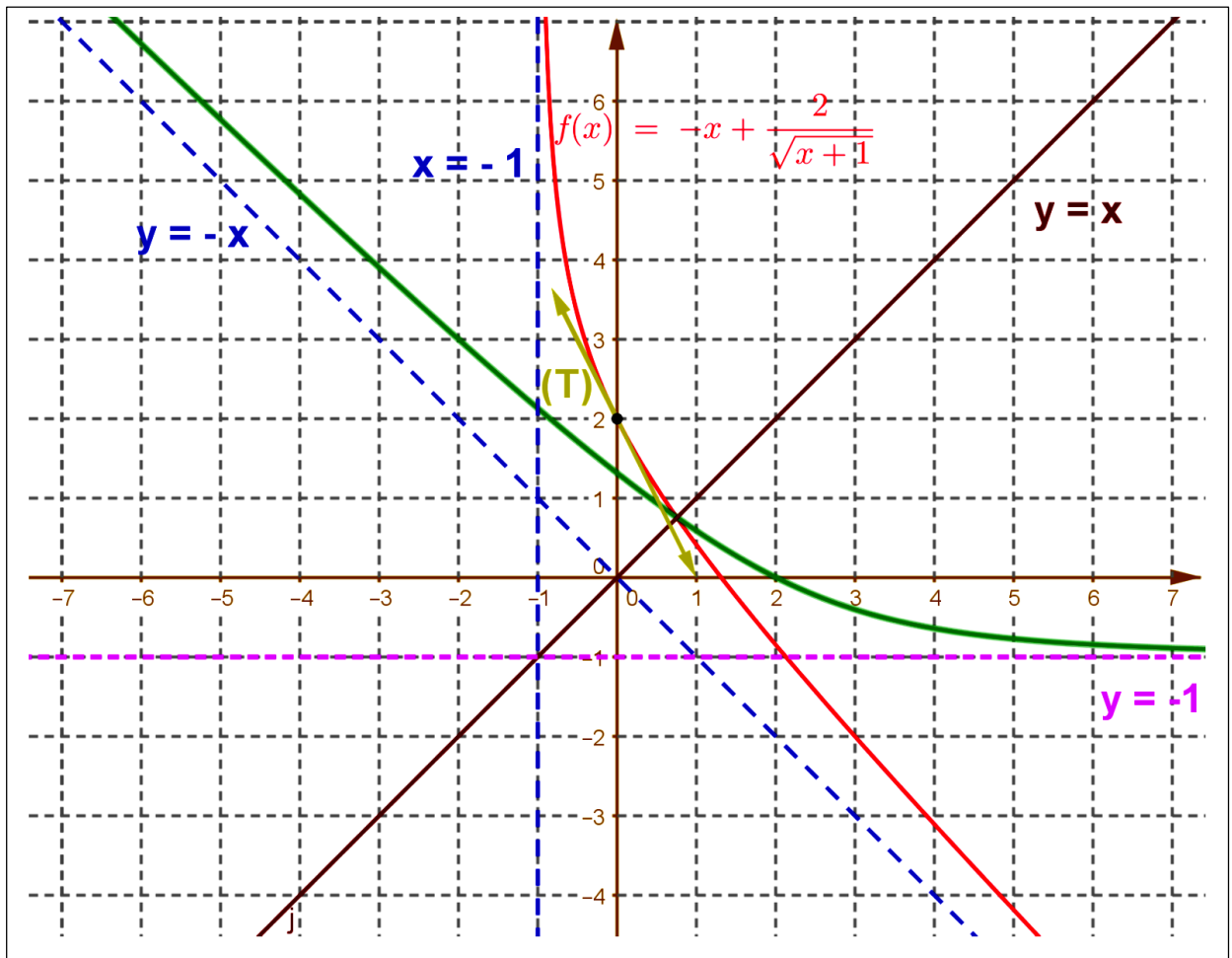


لدينا : الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$ و دالتها المشتقة $f'(x) < 0$ على $]-1; +\infty[$ إذن $f'(x) \neq 0$ و بالتالي الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I) = J$.

ج نحسب بدلالة α : $(f^{-1})'(\alpha)$.

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(\alpha) &= \frac{1}{f' \circ f(\alpha)} \\ &= \frac{1}{f'(f(\alpha))} \\ &= \frac{1}{f'(\alpha)} \quad ; \quad (f(\alpha) = \alpha) \text{ لدينا :} \\ &= \frac{1}{-1 - 2 \times \frac{1}{\sqrt{\alpha+1}} \times \frac{1}{\alpha+1}} \\ &= -\frac{(\alpha+1)\sqrt{\alpha+1}}{(\alpha+1)\sqrt{\alpha+1} + 2}\end{aligned}$$

د ثم أنشئ المنحنى الممثل للدالة العكسية f^{-1} في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) (بلون آخر).





نعتبر الدالة العددية f المعرفة على B :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x}{2x+1} & ; x \geq 0 \\ f(x) = -x + \sqrt{x^2 - x} & ; x < 0 \end{cases}$$
 (C) منحنى f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

01.

أ- نتحقق أن : مجموعة تعريف الدالة f هي $D = \mathbb{R}$.

• الدالة $x \mapsto \frac{-x}{2x+1}$ معرفة على $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ إذن الدالة f معرفة على $D_1 = [0; +\infty[$.

• الدالة $x \mapsto -x + \sqrt{x^2 - x}$ معرفة لكل x حيث $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$ أي على $D_2 =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$.

• ومنه الدالة f معرفة على $D_f = D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}$.

خلاصة : الدالة f معرفة على $D_f = \mathbb{R}$.

ب- نحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة الأولى.

• لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

• التأويل الهندسي للنتيجة : منحنى الدالة f يقبل مقارب أفقي هو المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}$.

• لدينا : $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x} = +\infty\right)$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \sqrt{x^2 - x} = +\infty$ ومنه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

ج- ندرس الفرع اللانهائي ل (C) بجوار $-\infty$.

• بما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ إذن المنحنى (C) يقبل فرع اللانهائي بجوار $-\infty$.

• نحدد a :

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2 - x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - x \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x} \quad ; (|x| = -x ; x \rightarrow -\infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = -2 \end{aligned}$$

ومنه : $a = -2$

• نحدد b :

لدينا :



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \sqrt{x^2 - x} + 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - x)}{x - \sqrt{x^2 - x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x - |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} ; (|x| = x ; x \rightarrow -\infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} + \cancel{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ومنه : $b = \frac{1}{2}$

خلاصة: منحنى الدالة f يقبل مقارب مائل هو المستقيم ذو المعادلة $y = -2x + \frac{1}{2}$.

د- أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 0$.

- اشتقاق الدالة f على يمين النقطة $x_0 = 0$.
- لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2x+1} = -1 \in \mathbb{R}$$

• التأويل الهندسي للنتيجة : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يمين النقطة $x_0 = 0$ معامل الموجه هو $-\frac{1}{2}$.

- اشتقاق الدالة f على يسار النقطة $x_0 = 0$.
- لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + \sqrt{x^2 - x} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x}\end{aligned}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - \sqrt{1-x}}{x} ; (|x| = -x ; x \rightarrow 0^-)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

$$= -\infty$$

ومنه الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار النقطة $x_0 = 0$

التأويل الهندسي للنتيجة: منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يسار النقطة $x_0 = 0$ موازي لمحو الأرتيب.

أدرس اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = 0$.

بما أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار النقطة $x_0 = 0$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0 = 0$.

التأويل الهندسي للنتيجة: منحنى الدالة f يقبل نقطة مزواة النقطة $x_0 = 0$

...02

أ- نبين أن: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ثم أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f على $]0, +\infty[$ ثم حدد إشارتها.

لدينا: الدالة $x \mapsto \frac{-x}{2x+1}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ إذن الدالة f معرفة على $]0, +\infty[$.

لدينا: $f'(x) = \left[\frac{-x}{2x+1} \right]' = \frac{-1}{(2x+1)^2} < 0$ ومنه: $f'(x) < 0$ على $]0, +\infty[$

ب- نبين أن: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0[$ ثم أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f على $]-\infty, 0[$ ثم تحقق أن

$$\forall x \in]-\infty, 0[; f'(x) = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

الدالة $x \mapsto x^2 - x$ قابلة للاشتقاق و موجبة على $]1, +\infty[\cup]-\infty; 0[$ إذن الدالة $x \mapsto -x + \sqrt{x^2 - x}$ قابلة للاشتقاق على

$]-\infty; 0[\cup]1, +\infty[$ إذن الدالة f معرفة على $]-\infty; 0[$.

لدينا: $f'(x) = \left[-x + \sqrt{x^2 - x} \right]' = -1 + \frac{(x^2 - x)'}{2\sqrt{x^2 - x}} = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x}} < 0 ; (x < 0 \Rightarrow 2x-1 < -1)$

ومنه: $f'(x) < 0$ على $]-\infty; 0[$

ج- نضع جدول لتغيرات الدالة f في \mathbb{R} .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	$-\infty$	-
$f(x)$	$+\infty$	↙ 0 ↘	$-\frac{1}{2}$



03. نعتبر g قصور الدالة f على $I =]-\infty, 0[$.

أ- بين أن g تقابل من I إلى مجال J يتم تحدهه نضع g^{-1} الدالة العكسية ل g لدينا :

• الدالة f متصلة و تناقصية قطعاً على $I =]-\infty, 0[$ إذن قصورها متصلة و تناقصية قطعاً على $I =]-\infty, 0[$ و بالتالي : g تقابل

من I إلى مجال مع $J = f(I) = f(]-\infty, 0[) =]0; +\infty[$

خلاصة : g تقابل من $I =]-\infty, 0[$ إلى $J =]0; +\infty[$

ب- أحسب : $g^{-1}(1)$ ثم $(g^{-1})'(1)$.

• نحسب $g^{-1}(1)$

نضع : $g^{-1}(1) = y$ مع $y \in I =]-\infty, 0[$

$$g^{-1}(1) = y \Leftrightarrow g(g^{-1}(1)) = g(y)$$

$$\Leftrightarrow g \circ g^{-1}(1) = f(y)$$

$$\Leftrightarrow 1 = -y + \sqrt{y^2 - y}$$

$$\Leftrightarrow 1 + y = \sqrt{y^2 - y}$$

$$\Leftrightarrow (1 + y)^2 = y^2 - y \quad (1 + y \geq 0 \Rightarrow y \in [-1; 0[)$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = y^2 - y$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3} \in [-1; 0[$$

ومنه : $g^{-1}(1) = -\frac{1}{3} \in I =]-\infty, 0[$

خلاصة : $g^{-1}(1) = -\frac{1}{3}$

• نحسب $(g^{-1})'(1)$

$$(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g' \circ g^{-1}(1)} = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))}$$

$$= \frac{1}{g'\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{f'\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

لدينا :

$$= \frac{1}{\left(-1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}\right)_{x=-\frac{1}{3}}} = -\frac{9}{4}$$



خلاصة: $(g^{-1})'(1) = -\frac{9}{4}$

ج- نحدد الدالة العكسية f^{-1} .

نعتبر $x \in I =]-\infty, 0[$ و $y \in J =]0; +\infty[$

ومنه:

$$g(x) = y \Leftrightarrow -x + \sqrt{x^2 - x} = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x} = y + x \quad ; (y + x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = (y + x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = y^2 + x^2 + 2xy$$

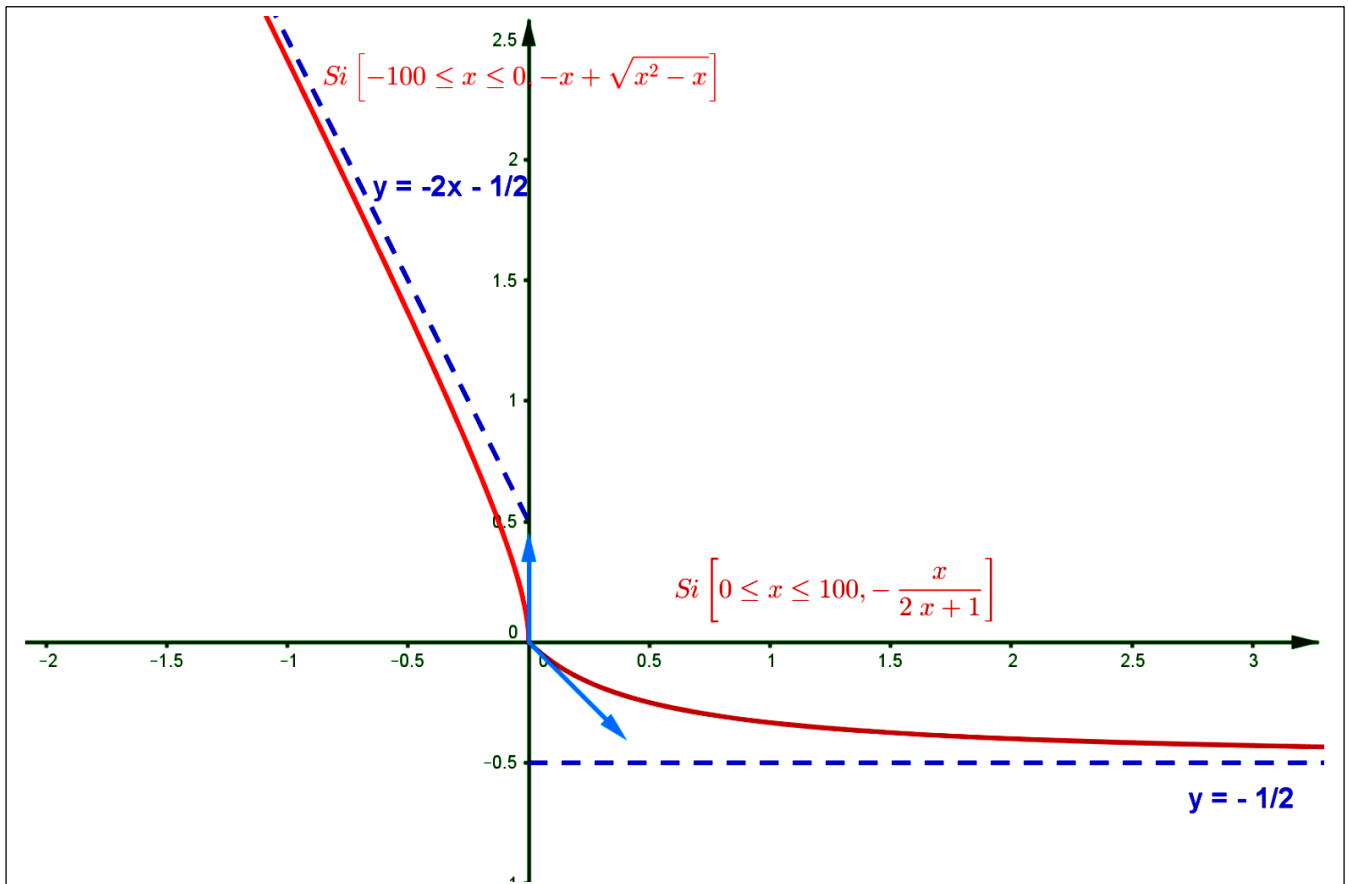
$$\Leftrightarrow -x(1 + 2y) = y^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-y^2}{1 + 2y} \in I =]-\infty, 0[\quad ; (y \in J =]0; +\infty[\Rightarrow 1 + 2y > 0)$$

$$g^{-1} : J =]0; +\infty[\rightarrow I =]-\infty, 0[$$

خلاصة: الدالة العكسية معرفة كما يلي: $x \mapsto g^{-1}(x) = \frac{-x^2}{1 + 2x}$

04. أنشئ المنحنى الممثل للدالة f في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ثم أنشئ المنحنى الممثل للدالة العكسية g^{-1} في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) (بلون آخر)





لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \cos x - \sin^2 x$. (C) منحنى f في معلم متعامد (O, \vec{i}, \vec{j}) مع $\|\vec{i}\| = 1$ و $\|\vec{j}\| = 4$ (cm بالسنتيمتر)

01. ندرس زوجية الدالة f .

- لدينا لكل x من \mathbb{R} من $D_f = \mathbb{R}$ كذلك $-x$ من \mathbb{R} .
- ليكن x من \mathbb{R} من $D_f = \mathbb{R}$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x) - \sin^2(-x) \\ &= \cos x - (-\sin x)^2 \\ &= \cos x - \sin^2 x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ومنه: $f(-x) = f(x)$

خلاصة: الدالة زوجية على $D_f = \mathbb{R}$.

02. نبين أن: الدالة f دورية و دورها 2π ثم استنتج D_E مجموعة دراسة الدالة f .

- نبين أن الدالة f دورية و دورها 2π ثم
- لدينا لكل x من \mathbb{R} من $D_f = \mathbb{R}$ كذلك $x+2\pi$ من \mathbb{R} و $x-2\pi$ من \mathbb{R}
- ليكن x من \mathbb{R} من $D_f = \mathbb{R}$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \cos(x+2\pi) - \sin^2(x+2\pi) \\ &= \cos x - \sin^2 x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ومنه: $f(x+2\pi) = f(x)$

خلاصة: الدالة f دورية و دورها 2π .

- مجموعة دراسة الدالة f
- بما أن الدالة f دورية و دورها 2π ندرسها على مجال سعته 2π مثلا على $[-\pi; \pi]$.
- بما أن الدالة f زوجية ندرسها على $[-\pi; \pi] \cap \mathbb{R}^+ = [0; \pi]$

خلاصة: مجموعة دراسة الدالة f هي $D_E = [0; \pi]$.

03. نتحقق أن: $f'(x) = -2\sin x \left(\cos x + \frac{1}{2} \right)$, $x \in [0, \pi]$.

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\cos x - \sin^2 x]' \\ &= -\sin x - 2(\sin x)' \sin x \\ &= -\sin x - 2\cos x \sin x \end{aligned}$$



$$= -2 \sin x \left(\cos x + \frac{1}{2} \right)$$

04. ندرس إشارة f' على $[0, \pi]$ ثم ضع جدول لتغيرات الدالة f على $[0, \pi]$.

❖ إشارة f' على $[0, \pi]$

- لدينا : على المجال $[0; \pi]$ الدالة $x \mapsto \cos x$ تناقصية
ومنه :

$$x \geq \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cos x \leq \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \cos x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cos x + 1 \leq 0$$

على المجال $\left[\frac{2\pi}{3}; 2\pi \right]$ لدينا : $2 \cos x + 1 \leq 0$. على المجال $\left[0; \frac{2\pi}{3} \right]$ لدينا : $2 \cos x + 1 \geq 0$.

- على المجال $[0; \pi]$ الدالة $x \mapsto \sin x$ موجبة

إذن إشارة f' على $[0, \pi]$ بواسطة الجدول التالي : ثم جدول تغيرات الدالة f على $D_E = [0; \pi]$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π		
$-\sin x$	0	-	-	0	
$2 \cos x + 1$		+	0	-	
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$	1				-1
		↘		↗	
			$-\frac{5}{4}$		

05. نبين أن : g قصور f على $\left[0; \frac{2\pi}{3} \right]$ تحقق تقابل من $\left[0; \frac{2\pi}{3} \right]$ إلى J يتم تحدهه نرمر لتقابلها العكسي ب g^{-1} .

- الدالة f متصلة و تناقصية قطعاً على $I = \left[0; \frac{2\pi}{3} \right]$ إذن قصورها متصلة و تناقصية قطعاً على $I = \left[0; \frac{2\pi}{3} \right]$ و بالتالي : g تقابل

$$J = f(I) = f\left(\left[0; \frac{2\pi}{3} \right]\right) = \left[-\frac{5}{4}; 1 \right] \text{ مع } I \text{ إلى مجال}$$

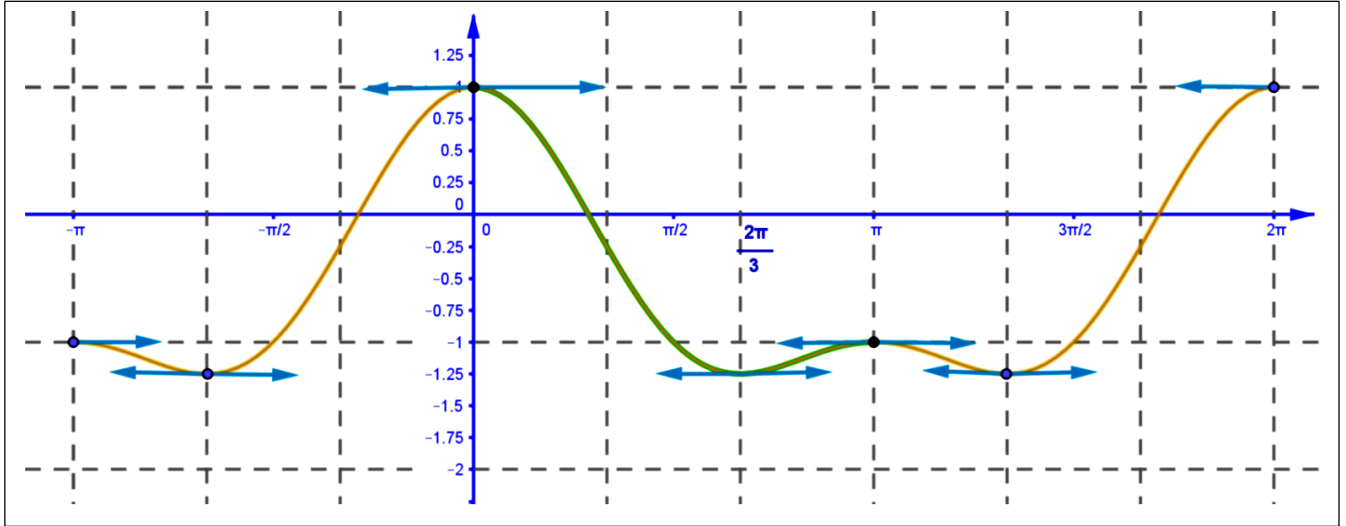
$$\text{خلاصة : } g \text{ تقابل من } I = \left[0; \frac{2\pi}{3} \right] \text{ إلى } J = \left[-\frac{5}{4}; 1 \right]$$

06. ننشئ (C_f) منحنى f في (O, \vec{i}, \vec{j}) و ذلك على D_E (بلون أخضر)

أنظر الشكل أسفله .



07. نتم إنشاء (C_f) منحنى f على $[-\pi, 2\pi]$ في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) (بلون أخضر) ثم $(C_{g^{-1}})$ منحنى الدالة g^{-1} في نفس المعلم (بلون أخضر متقطع).
أنظر الشكل أسفله.



04. تمرين إضافي (في المنزل)

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty[$ ب:

$$(C) \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} ; x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[\\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

منحنى f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

01. ...
أ- نحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة.
لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

خلاصة: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

• التأويل الهندسي للنتيجة: منحنى الدالة f يقبل مقارب أفقي هو المستقيم ذو المعادلة $y = 0$.



ب- ندرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 1$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ولدينا : $f(1) = \frac{1}{2}$ و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2} = f(1)$

خلاصة : الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 1$.

ج- ندرس اتصال الدالة f على يمين النقطة $x_0 = 0$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\ &= \frac{-1}{-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

ولدينا : $f(0) = 1$ و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$

خلاصة : الدالة f متصلة على يمين النقطة $x_0 = 0$.

...02

أ- نبين أن الدالة f قابلة الاشتقاق في $x_0 = 1$ و تحقق أن $f'(1) = -\frac{1}{8}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+2\sqrt{x}-1}{2(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\cancel{(\sqrt{x}-1)^2}}{2\cancel{(\sqrt{x}-1)^2}(\sqrt{x}+1)^2}\end{aligned}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2(\sqrt{x}+1)^2} = -\frac{1}{8}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{8} \in \mathbb{R} \text{ : ومنه}$$

إذن : الدالة f قابلة الاشتقاق في $x_0 = 1$ و تحقق أن $f'(1) = -\frac{1}{8}$.

بـ نجد معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في $x_0 = 1$.
المعادلة هي :

$$\begin{aligned} y &= (x-x_0)f'(x_0)-f(x_0)(x_0=1) \\ &= (x-1)f'(1)-f(1) \\ &= (x-1)\left(-\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{8}x-\frac{3}{8} \end{aligned}$$

خلاصة : معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في $x_0 = 1$ هي $y = -\frac{1}{8}x - \frac{3}{8}$.

...03

أـ هل الدالة f قابلة الاشتقاق على يمين $x_0 = 0$ ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة المحصل عليها .
ندرس اشتقاق الدالة f على يمين $x_0 = 0$.
لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-x}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}^2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \quad ; \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = 0^+ \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty \notin \mathbb{R} \text{ ومنه :}$$

خلاصة: الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$.

التأويل الهندسي للنتيجة: منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يمين النقطة $x_0 = 0$ موازي لمحور الأرتاب

ج: بين أن: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ ثم أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f على $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ ثم تحقق أن

$$f'(x) = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \quad \forall x \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \text{ ثم ضع جدول لتغيرات الدالة } f \text{ على }]0, +\infty[.$$

❖ الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[\setminus \{1\}$.

- الدالة $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ إذن قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[\setminus \{1\}$.
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}-1$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ إذن قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[\setminus \{1\}$.
- ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ (لأنها خارج دالتين قابلتين للاشتقاق)

❖ نحسب الدالة المشتقة f' للدالة f على $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ ثم تحقق.
لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right]' = \frac{(\sqrt{x}-1)'(x-1) - (\sqrt{x}-1)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - (\sqrt{x}-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - 2x + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \\ &= \frac{-x + 2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \\ &= \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0 \end{aligned}$$

❖ نضع جدول لتغيرات الدالة f على $]0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-
$f(x)$	1	0

د: بين أن f تحقق تقابل من $]0, +\infty[$ إلى مجال J يتم تحده نضع f^{-1} الدالة العكسية ل f .

لدينا:

- الدالة f متصلة و تناقصية قطعاً على $I =]0, +\infty[$ و بالتالي: f تقابل من I إلى مجال مع $J = f(I) = f(]0, +\infty[) =]0; 1]$



خلاصة: f تقابل من $I = [0, +\infty[$ إلى $J =]0; 1]$

04. ننشئ المنحنى الممثل للدالة f في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ثم أنشئ المنحنى الممثل للدالة العكسية f^{-1} في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

