السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية	دراسة الدوال حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 :
$$\begin{cases} f(x)=x^2-4x+5\ ; & x\geq 2 \\ f(x)=x^3-12x+17; & x<2 \end{cases}$$

1

لدينا : $f(2)=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x>2}} x^2-4x+5=4-8+5=1$

و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x<2}} x^3-12x+17=8-24+17=1$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x<2}} f(x)=f(2)$ ، بالتالي : f متصلة في 2

2

$\boxed{\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2-4x+5=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2=+\infty}$ $\boxed{\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3-12x+17=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3=-\infty}$

عند حساب النهاية جوار $+\infty$ يجب استعمال التعبير x^2-4x+5 لكونه تم تعريفه في المجال $[2,+\infty[$

و في $-\infty$ يجب استعمال التعبير $x^3-12x+17$ لكونه تم تعريفه في المجال $]-\infty,2[$

3

نعلم أن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$ و لدينا : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2-4x+5}{x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x=+\infty$

و أن : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=-\infty$ ولدينا : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{x^3-12x+17}{x}=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2=+\infty$

إذن Cf يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$ و $-\infty$

4

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x>2}}\frac{x^2-4x+5-1}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x>2}}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x>2}}\frac{(x-2)^2}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x>2}} x-2=0$

و :

$$\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x<2}}\frac{x^3-12x+17-1}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x<2}}\frac{x^3-12x+16}{x-2}$$

$$\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}==\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x<2}}\frac{(x-2)(x^2+2x-8)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x<2}} x^2+2x-8=0$$

بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$ فإن f تقبل الاشتقاق في 2 ولدينا : $f'(2)=0$

يجب دائما استعمال التعريف لدراسة قابلية اشتقاق دالة في نقطة تمثل طرف مجال.

في الاشتقاق على اليسار قمنا بتعميل $x^3-12x+16$ و ذلك بعد قسمتها على $x-2$ مستعملين القسمة الاقليدية

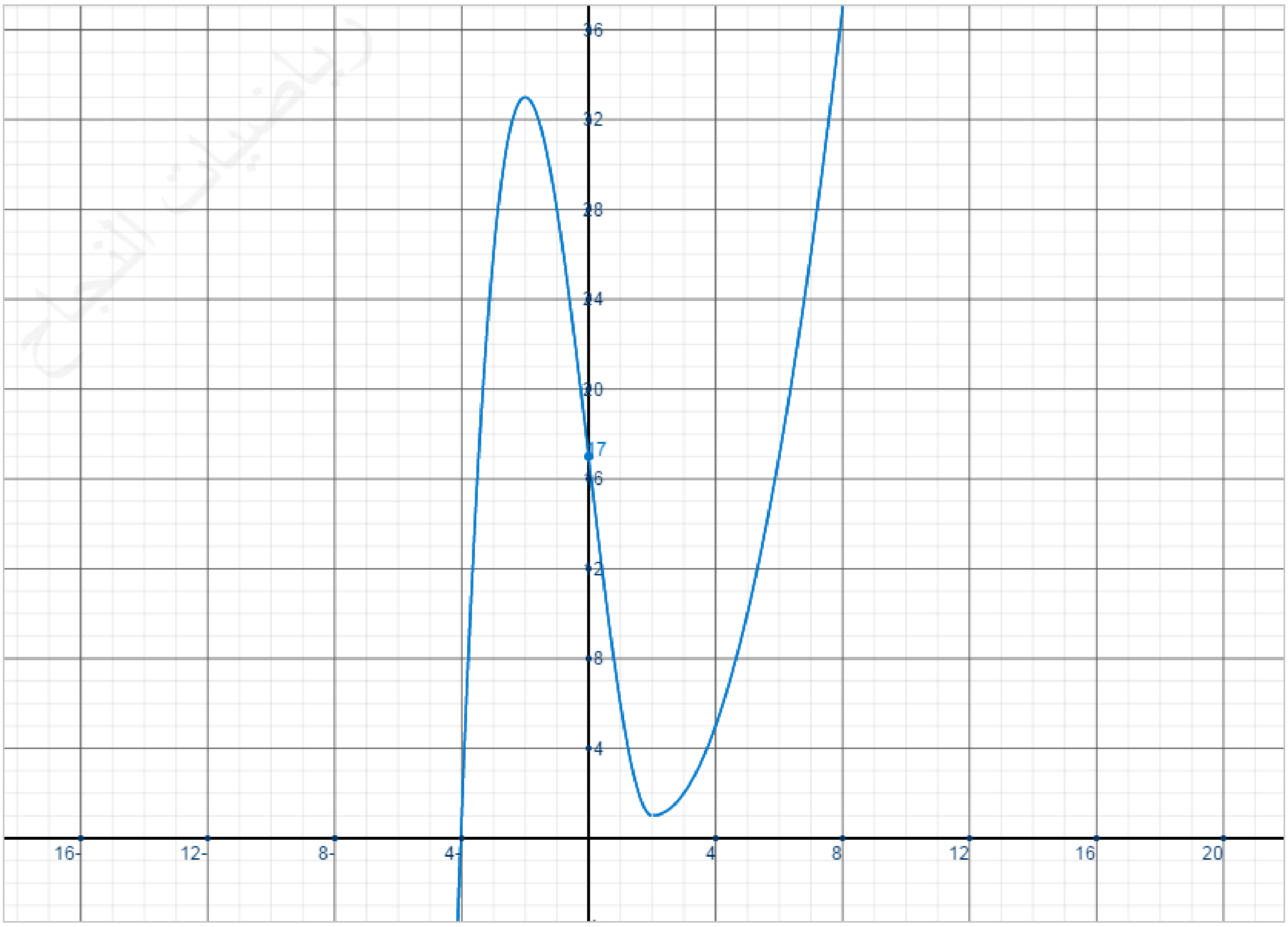
5

لدينا : $\forall x\in\,]2;+\infty[\quad f'(x)=(x^2-4x+5)'=2x-4=2(x-2)$

و : $\forall x\in\,]-\infty;2[\quad f'(x)=(x^3-12x+17)'=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x-2)(x+2)$

6

$x-2$	-	-	+
$(x-2)(x+2)$	+	-	+
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 33	33 ↘ 1	1 ↗ $+\infty$



7

تمرين 2 :

$$\begin{cases} f(x)=-1+\sqrt{x+1} \ ; \quad x\geq 0 \\ f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1} ; \quad x<0 \end{cases}$$

1

لدينا : $Df=\{x\geq 0 \ / \ x+1\geq 0\}=[0,+\infty[$ (لأن $x\geq 0 \Rightarrow x+1\geq 1\geq 0$)

على المجال : $]-\infty,0[$ ، لدينا : $Df=\{x<0 \ / \ x+1\neq 0\}=\{x<0 \ / \ x\neq -1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,0[$

بالتالي : $\boxed{Df=[0,+\infty[\cup(]-\infty,-1[\cup]-1,0[)=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[}$

2

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} -1+\sqrt{x+1}=-1+1=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} x-1+\dfrac{1}{x+1}=-1+1=0$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} f(x)=f(0)=0$ ، بالتالي : f متصلة في 0

3

$$\boxed{\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty} -1+\sqrt{x+1}=+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty} x-1+\frac{1}{x+1}=-\infty \ (-\infty+0\rightarrow-\infty)}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\mapsto-1\\ x>-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\mapsto-1\\ x>-1}} x-1+\frac{1}{x+1}=+\infty \quad (-2+(+\infty)\rightarrow+\infty)}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\mapsto-1\\ x<-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\mapsto-1\\ x<-1}} x-1+\frac{1}{x+1}=-\infty \quad (-2+(-\infty)\rightarrow-\infty)}$$

لاحظ أننا استعملنا التعبير $x-1+\dfrac{1}{x+1}$ في كلا النهايتين و ذلك لكون $-1\in]-\infty,0[$

4

لدينا:

$$\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{2}$$

و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} \frac{x-1+\frac{1}{x+1}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} \frac{\frac{x^2-1+1}{x+1}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} \frac{x^2}{x+1}\times\frac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} \frac{x}{x+1} = 0$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\ x<2}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\ x>2}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ فإن f لا تقبل الاشتقاق في الصفر

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{2}$ إذن Cf يقبل نصف مماس يمين الصفر معادلته :

$$\begin{cases} y = f_d'(0)(x-0)+f(0) \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ إذن Cf يقبل نصف مماس أفقي يسار الصفر (معادلته $\begin{cases} y=0 \\ x\leq 0 \end{cases}$)

5

لدينا : لدينا: $\forall x>0 \quad f'(x) = \left(-1+\sqrt{x+1}\right)' = \frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$

و $\forall x<0 \quad f'(x) = \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)' = 1-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} = 1-\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

منه:

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … $+\infty$
$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$			+
$x(x+2)$	+	-	+
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	↘ 0	0 ↗ $+\infty$

6

نعلم أن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{-1+\sqrt{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{-1}{x}+\frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{-1}{x}+\sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = 0+\sqrt{0} = 0$

إذن Cf يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأفاصيل جوار $+\infty$

ونعلم أن : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x) = -\infty$ و لدينا : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\mapsto-\infty} \frac{x-1+\frac{1}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\mapsto-\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

منه : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)-x = -1+\frac{1}{x+1} = -1$

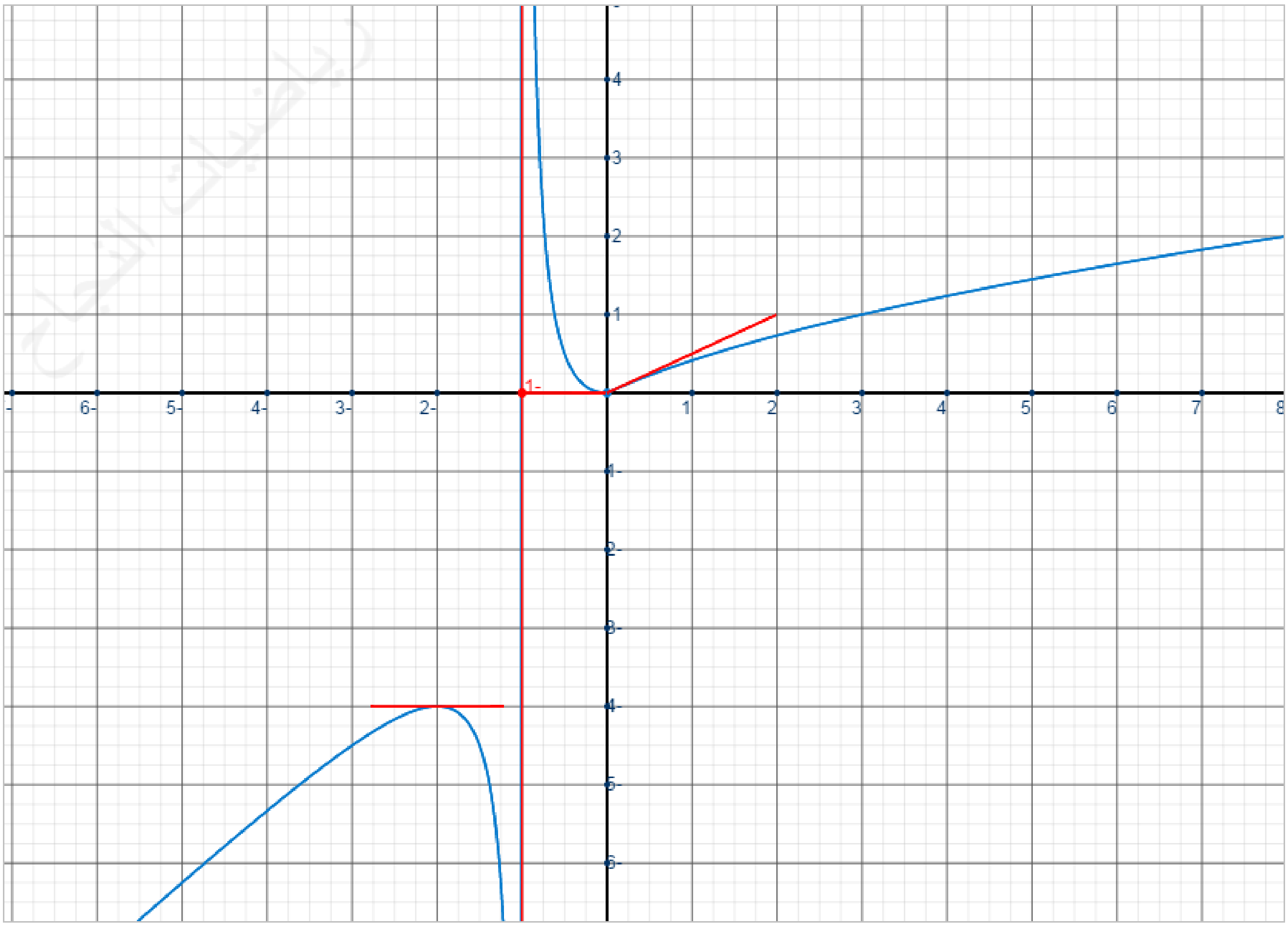
إذن Cf يقبل مقاربا مائلا جوار $-\infty$ معادلته : $\boxed{(\Delta): y = x-1}$

7

لدراسة الوضع النسبي لـ Cf و مقاربه المائل جوار $-\infty$ ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x-1)$ على المجال $]-\infty,-1[\cup]-1,0]$

على هذا المجال لدينا: $f(x)-(x-1) = \frac{1}{x+1}$ إذن :

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … $+\infty$
$x+1$	-	+	
	Cf تحت المقارب	Cf فوق المقارب	



8