

تمرين 1: نعتبر الدالة العددية $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

$$x \in Df \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x \neq -1 \\ -x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow -x \in Df, \quad Df = \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x+1) \neq 0\}$$

لدينا : $Df = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0 \text{ et } x+1 \neq 0\}$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \text{ et } x \neq -1\}$$

$$Df =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$$

و $\forall x \in \mathbb{R} f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x)$ ، إذن f زوجية

1

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0$ ، إذن يجب تحديد إشارة المقام $x^2 - 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	-	+	+

إذن : $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0^+$ منه : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0^-$ منه : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

2

مما يعني أن منحنى الدالة يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 1$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ ، إذن منحنى الدالة يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y = 2$

جوار $+\infty$

رياضيا لا يصح كتابة : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{0} = \infty$ ، لكننا قد نستعملها في الحصص الدراسية وربما حتى الفروض ، لكن رغم ذلك تظل تعبيراً غير صحيح من الناحية الرياضياتية ، لذلك ستكون مرفوضة في الامتحان الوطني ، من أجل ذلك الأفضل التعود على استعمال التعليل الرياضي السليم

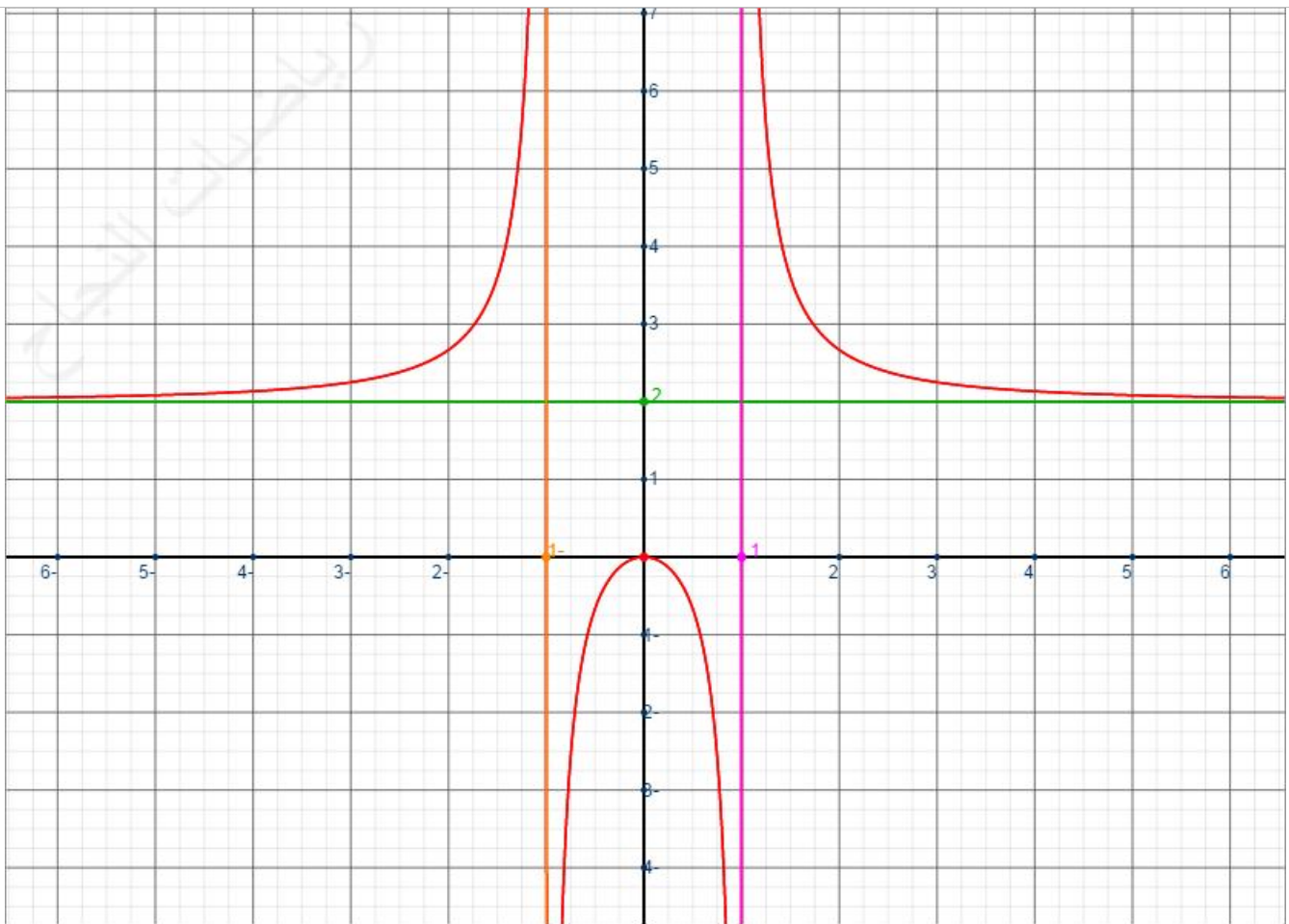
$$\forall x \in Df \quad f'(x) = \frac{(2x^2)'(x^2 - 1) - 2x^2(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2 \times 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{4x^3 - 4x - 4x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

3

طبقتنا قاعدة مشتقة خارج : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$-4x$	+	+	-	-	-
$f'(x)$	+	+	-	-	-
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$

4



5

أهم ما يجب احترامه في منحنى الدالة هو تطابق المنحنى مع النتائج المحصل عليها في الأسئلة من مماسات ومقاربات و زوجية وفروع لانهائية...، في المنحنى أعلاه المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ (اللون الأخضر) يمثل مقاربا أفقيا ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$) بينما المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ (اللون البنفسجي) يمثل مقاربا عموديا ($\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$) ونظرا لكون الدالة زوجية فإن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ هو أيضا مقارب عمودي.

تمرين 2: نعتبر الدالة العددية $f(x) = \frac{2x^2 + x + 8}{4x}$ وليكن C_f تمثيلها المبياني في معلم متعامد.

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / 4x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

(يستحسن كتابة مجموعة التعريف على شكل اتحاد مجالات عوض $\mathbb{R}_{\setminus \{0\}}$)

1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 8}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x + 8}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

2

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 + x + 8 = 8$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 4x = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 4x = 0^-$ إذن: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$

المحددات نعني بها $+\infty$ و $-\infty$ (إن لم تكن الدالة معرفة على مجال محدود) والأعداد التي لا تنتمي إلى مجموعة التعريف وتمثل أحد أطراف مجموعة التعريف، مثلا إذا كان: $Df =]-4, 2] \cup]7, +\infty[$ فالمحددات هي $+\infty$ و -4 و 7

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 8}{4x} - \frac{2x + 1}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 8}{4x} - \frac{2x^2 + x}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{4x} = 0$$

3

و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{4x} = 0$ إذن: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$: (Δ) مقارب مائل لـ C_f جوار $+\infty$ و جوار $-\infty$

عندما نتوفر على معادلة المقارب لاداعي لتطبيق مراحل البحث عن المقارب (أثناء دراسة الفروع اللانهائية).

$$\forall x \in Df \quad f'(x) = \frac{(2x^2 + x + 8)'(4x) - (2x^2 + x + 8)(4x)'}{(4x)^2} = \frac{(4x+1)(4x) - (2x^2 + x + 8) \times 4}{16x^2}$$

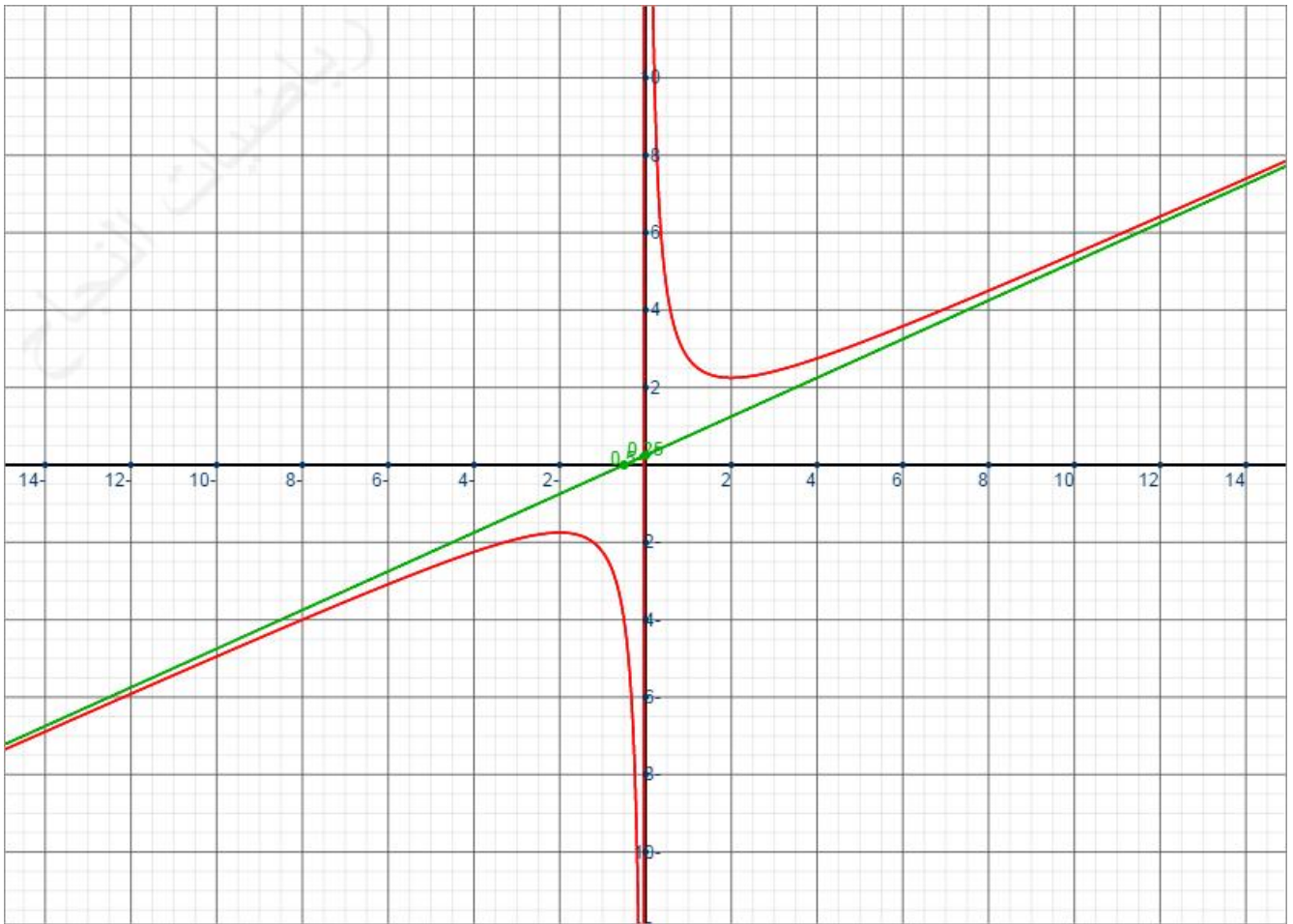
$$f'(x) = \frac{16x^2 + 4x - 8x^2 - 4x - 32}{16x^2} = \frac{8x^2 - 32}{16x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$$

لدينا :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	-	-	+	+
$f'(x)$	+	-	-	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{7}{4}$	$-\infty$	$\frac{9}{4}$	$+\infty$

منه :

4



5

تمرين 3 : نعتبر الدالة العددية $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x}$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$$

$$Df =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

2

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$$

و

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 - 2 = -2$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0^-$ إذن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{x^3 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ : ولدینا } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \times \frac{x^3 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ : ولدینا } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ نعلم أن}$$

إذن Cf يقبل فرعاً شلجيمياً باتجاه محور الأرتیب جوار $+\infty$ و $-\infty$

$$\forall x \in Df \quad f'(x) = \frac{(x^3 - 2)'(x) - (x^3 - 2)(x)'}{(x)^2} = \frac{(3x^2)(x) - (x^3 - 2) \times 1}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 + 2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2}{(x)^2} = \frac{2(x^3 + 1)}{x^2} = \frac{2(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2}$$

ولدینا: $\forall \in Df \quad x^2 > 0$

ولدینا محددة الحدودية $x^2 - x + 1$ هي $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ فهي موجبة ($a = 1 > 0$)

منه:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	-	+		+
$f'(x)$	-	+		+
$f(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$	$+\infty$

