الاحتمالات

ذ. محمد الكيال

مصطلحات

المصطلح الاحتمالي :	معناه :
تجربة عشوائية	كل تجربة تقبل أكثر من نتيجة
Ω كون الإمكانيات	هي مجموعة الإمكانيات الممكنة لتجربة عشوائية
حدث A	A جزء من كون الإمكانيات Ω
حدث ابتدائي	كل حدث يتضمن عنصرا وحيدا
تحقق الحدث $A \cap B$	إذا تحقق الحدثان A و B في آن واحد
تحقق الحدث $A \cup B$	إذا تحقق A أو B أو هما معا
الحدث المضاد للحدث A	هو الحدث $\overline{A}$ $\left(A \cap \overline{A} = \varnothing \text{ و } A \cup \overline{A} = \Omega\right)$
A و B حدثان غير منسجمين	$A \cap B = \varnothing$

استقرار حدث - احتمال حدث:

تعريف:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

- عندما يستقر احتمال حد ث ابتدائي $\{\omega_i\}$ في قيمته p_i نقول أن احتمال الحدث $\{\omega_i\}$ هو : p_i
  ونكتب : $P\left(\{\omega_i\}\right) = p_i$
- احتمال حدث هو مجموع الاحتمالات الابتدائية التي تكون هذا الحدث
  أي إذا كان $A = \{\omega_1;\omega_2;\omega_3;...;\omega_n\}$ حدثا من Ω فإن احتمال الحدث A هو :
  $$p(A) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + ... + p(\omega_n)$$

خاصيات:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

- $p(\varnothing) = 0$ و $p(\Omega) = 1$
- $0 \leq p(A) \leq 1$ لكل حدث A من Ω
- احتمال اتحاد حدثين :
  لكل حدثين A و B من Ω
  $$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ إذا كان A و B غير منسجمين
- احتمال الحدث المضاد :
  لكل حدث A من Ω : $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$

فرضية تساوي الاحتمالات:

تعريف:

إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيتها Ω

فإن احتمال كل حدث A من Ω هو : $p(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega}$

الاحتمال الشرطي - استقلالية حدثين:

تعريف:

ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث : $p(A) \neq 0$

احتمال حدث B علما أن الحدث A محقق هو العدد : $p_A(B) = p\left(B/A\right) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

نتيجة:

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث : $p(A) \times p(B) \neq 0$

لدينا : $p(A \cap B) = p(A) \times p\left(B/A\right) = p(B) \times p\left(A/B\right)$

تعريف:

لكل حدثين A و B مرتبطين بنفس التجربة العشوائية

A و B حدثان مستقلان $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

خاصية:

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية و Ω_1 و Ω_2 تجزيئا ل Ω

$(\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ و $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing)$

لكل حدث A من Ω : $p(A) = p(\Omega_1) \times p\left(A/\Omega_1\right) + p(\Omega_2) \times p\left(A/\Omega_2\right)$

الاختبارات المتكررة:

ليكن A حدثا في تجربة عشوائية احتماله p

إذا أعيدت هذه التجربة n مرة فان احتمال تحقق الحدث A , k مرة بالضبط هو :

$C_n^k (p)^k (1-p)^{n-k} \qquad (k \leq n)$

قانون احتمال متغير عشوائي:

ليكن متغيرا عشوائيا على Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية

لتحديد قانون احتمال المتغير العشوائي X نتبع المرحلتين التاليتين :

- تحديد $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; ...; x_n\}$: مجموعة القيم التي يأخذها المتغير X
- نحسب الاحتمال $p(X = x_i)$ لكل i من المجموعة $\{1; 2; ...; n\}$

الأمل الرياضي - المغايرة - الانحراف الطرازي لمتغير عشوائي:

ليكن X متغيرا عشوائيا قانونه

معرف بالجدول التالي :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

تعاريف:

الأمل الرياضي للمتغير X :	$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + ... + x_n \times p_n$
المغايرة للمتغير X :	$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
الانحراف الطرازي للمتغير X :	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

القانون الحداني:

ليكن p احتمال حدث A في تجربة عشوائية, نعيد هذه التجربة n مرة

المتغير العشوائي X الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A يسمى توزيعا حدانيا وسيطاه n و p

ولدينا $p(X = k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k} \qquad \forall k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$

و $E(X) = n \times p$ و $V(X) = np(1-p)$