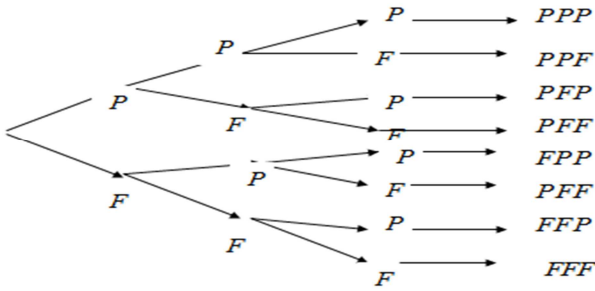


الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: الاحتمالات
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة
والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

شجرة الإمكانيات



(2) إذن لهذه التجربة 8 إمكانيات فقط إذن فضاء الإمكانيات هو :

$$\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$$

$$card(\Omega) = 8 \text{ (8 إمكانيات فقط)}$$

الرمية الأولى	الرمية الثانية	الرمية الثالثة
2	2	2

تمرين 4: نعتبر الأرقام التالية: 1 و 3 و 5

حدد عدد الأعداد المكونة من رقمين الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

الجواب: رقم الوحدات يمكن اختياره ب ثلاث كصفات مختلفة كذلك رقم العشرات

رقم الوحدات	رقم العشرات
3	3

وحسب المبدأ الأساسي للتعداد فإن عدد الأعداد المكونة من رقمين الذي يمكن تكوينه

$$\text{هو: } card(\Omega) = 3 \times 3 = 9$$

تمرين 5: نعتبر الأرقام التالية: 1 و 2 و 6

حدد عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

الجواب: طريقة 1: رقم الوحدات يمكن اختياره ب ثلاث كصفات مختلفة

لكن رقم العشرات فقط بكيفيتين مختلفتين

رقم الوحدات	رقم العشرات
3	2

طريقة 2: كل إمكانية هي ترتيبية من عنصرين مختارين من بين 3 عناصر

ومنه عدد الإمكانيات هو عدد الترتيبات :

$$\text{إذن : } A_3^2 = 3 \times (3-1) = 3 \times 2 = 6$$

تمرين 1: نذكر أن لقطعة نقدية وجهين P و F

نرمي قطعة نقدية مرة واحدة

(1) حدد كون الإمكانيات لهذه التجربة ؟

(2) حدد رئيسي المجموعة Ω

أجوبة:

(1) يمكن الحصول على P أو F

P هي إمكانية و F هي إمكانية أخرى

إذن لهذه التجربة إمكائيتين فقط إذن مجموعة الإمكانيات هي :

$$\Omega = \{P; F\}$$

إذن: $card(\Omega) = 2$ (إمكائيتين فقط) نقرأ رئيسي المجموعة Ω

تمرين 2: نرمي قطعة نقدية مرتين متتاليتين

(1) حدد كون الإمكانيات لهذه التجربة ؟

(2) حدد رئيسي المجموعة Ω

أجوبة:

(1) يمكن الحصول على PP أو FF أو FP أو PF إذن: PP هي إمكانية و FF هي إمكانية أخرى

(2) إذن لهذه التجربة 4 إمكانيات فقط إذن مجموعة الإمكانيات هي :

$$\Omega = \{PP; FF; PF; FP\}$$

ولدينا : $card(\Omega) = 4$ (4 إمكانيات فقط)

يمكن لنا استعمال شجرة الإمكانيات للبحث عن كل الإمكانيات

الرمية الأولى	الرمية الثانية
2	2

$$card(\Omega) = 2 \times 2 = 4 \text{ مبدأ الجداء}$$

تمرين 3: نرمي قطعة نقدية ثلاث مرات متتالية

(1) أرسم شجرة الإمكانيات

(2) حدد كون الإمكانيات Ω وحدد $card(\Omega)$

الأجوبة:

(1) يمكن الحصول على PPP أو FFF أو

PPP هي إمكانية و FFF هي إمكانية أخرى و

تمرين 6: أحسب: A_4^2 و A_5^3 و A_7^4 و $\frac{A_6^3 \times A_{10}^4}{A_{10}^5}$

الجواب: $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$ $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

$A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

$\frac{A_6^3 \times A_{10}^4}{A_{10}^5} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{5 \times 4}{1} = 20$

تمرين 7: لتشغيل الهاتف المحمول يجب الضغط على الأزرار الأربعة التي تحمل الأرقام المكونة للرقن السري حسب ترتيبها وإلا سيغلق تلقائياً

1. ما عدد الأقفان السرية الممكنة إذا علمت أن الأرقام المكونة لها لا يمكننا تكرارها

2. ما عدد الأقفان السرية الممكنة إذا علمت أن الأرقام المكونة لها لا يمكننا تكرارها وتتكون فقط من الأرقام التالية فقط: 1 و 2 و 3 و 4

الجواب (1): كل امكانية هي ترتيبية من أربع أرقام مختارة من بين 10 أرقام عدد الامكانيات هو عدد الترتيبات:

ومنه $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

(2)

كل امكانية هي ترتيبية من أربع أرقام مختارة من بين 4 أرقام عدد الامكانيات هو عدد الترتيبات:

ومنه: $A_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

تمرين 8: نعتبر الأرقام التالية: 4 و 5 و 6

حدد عدد الأعداد المكونة من ثلاث أرقام مختلفة الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

الجواب: طريقة 1:

رقم الوحدات يمكن اختياره ب ثلاث كفيات مختلفة لكن رقم العشرات فقط بكيفيتين مختلفتين و رقم المئات بكيفية وحيدة

رقم الوحدات	رقم العشرات	رقم المئات
3	2	1

وحسب المبدأ الأساسي للتعداد فان عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين الذي يمكن تكوينه

هو: $card(\Omega) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

كل امكانية : تسمى تبديلة لثلاث أعداد

أمثلة: العدد: 456 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة

العدد: 564 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة

العدد: 546 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة

كم عدد التبديلات ؟ هناك 6 تبديلات ممكنة

كل امكانية هي تبديلة من ثلاث أعداد

ومنه عدد الامكانيات هو عدد التبديلات:

عدد التبديلات هو: $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ و يقرأ عاملي 3

تمرين 9: أحسب: $4!$ و $5!$ و $7!$ و $\frac{10 \times 5!}{6 \times 8!}$

الجواب:

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ و $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

$\frac{10 \times 5!}{6 \times 8!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 5!}{6 \times 5 \times 8!} = \frac{10 \times 9}{6} = \frac{10 \times 3 \times 3}{3 \times 2} = \frac{10 \times 3}{2} = 15$

تمرين 10: ما عدد الكلمات من ستة حروف لها معنى أو لا , و التي يمكن كتابتهما باستعمال جميع حروف الكلمة " المغرب "

الجواب: كل امكانية هي تبديلة من ست أحرف

ومنه عدد الامكانيات هو عدد التبديلات:

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$

تمرين 11: ما عدد الكلمات من أربع حروف لها معنى أو لا و التي يمكن تكوينها باستعمال الحروف التالية فقط S و I و D و A

الجواب: كل امكانية هي تبديلة من أربعة أحرف

ومنه عدد الامكانيات هو عدد التبديلات: $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

تمرين 12: نعتبر المجموعة التالية: $E = \{a; b; c; d\}$

حدد عدد أجزاء المجموعة E التي تحتوي على ثلاث عناصر

الجواب: لدينا: $card(E) = 4$

طريقة 1:

الجزء: $A_1 = \{a; b; c\}$ يمكن تكوينه ويسمى تأليفة

العدد: $A_2 = \{a; b; d\}$ عدد يمكن تكوينه ويسمى تأليفة

الجزء: $A_3 = \{b; c; d\}$ يمكن تكوينه ويسمى تأليفة

العدد: $A_4 = \{a; c; d\}$ عدد يمكن تكوينه ويسمى تأليفة

اذن عدد التأليفات هو 4

طريقة 2: عدد أجزاء المجموعة E وكل جزء من E هو تأليفة ومنه

عدد الأجزاء هو عدد التأليفات لثلاث عناصر مختارة من بين 4 اي:

$C_4^3 = 4$

تمرين 13: أحسب: C_4^2 و C_5^2 و C_7^4 و C_{12}^3

و C_7^3 و C_5^3 و C_{12}^1 و C_7^1 و C_5^0 و C_5^4

الجواب:

$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2!} = 6$

$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$

$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 35$

$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} = 220$

$C_{12}^1 = 12$ و $C_5^3 = C_5^2 = 10$ و $C_7^3 = C_7^4 = 35$

$C_5^4 = 5$ و $C_5^0 = 1$ و $C_7^7 = 1$

تمرين 14: لاجتياز امتحان شفوي على كل مترشح أن يجيب على

سؤالين مسحوبين عشوائياً من بين خمس أسئلة مقترحة

حدد عدد الإمكانيات

الجواب: عدد الإمكانيات هو عدد التأليفات من سؤالين مختارة من

بين 5 اي: $C_5^2 = 10$

تمرين 15: $A = \{6, 7, 1, 0\}$ $E = \left\{2, 5, 6, 7, 1, 0, \frac{3}{4}\right\}$

$D = \{2\}$ $C = \left\{\frac{3}{4}, 5\right\}$ $B = \left\{\frac{3}{4}, 2, 7, 6, 1\right\}$

1. تحقق أن A و B و C و D أجزاء من E.

2. حدد: $\bar{A}, A \cup B, A \cap B$

3. حدد عدد أجزاء E التي تحتوي على ثلاث عناصر

4. حدد عدد أجزاء E التي تحتوي على خمسة عناصر

الأجوبة (1): A و B و C و D كلها أجزاء من E.

$$\frac{12 \times 7!}{10 \times 8!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 7!}{10 \times 8 \times 7!} = \frac{12 \times 11}{8} = \frac{4 \times 3 \times 11}{4 \times 2} = \frac{33}{2}$$

$$\frac{A_8^2 \times A_{10}^4}{A_8^5} = \frac{8 \times 7 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4} = \frac{5 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 2 \times 7}{6 \times 5 \times 4} = \frac{3 \times 2 \times 7}{1} = 42$$

$$\frac{8 \times 3}{7!} = \frac{8 \times 7 \times 3}{7!} = \frac{8 \times 3}{1} = 24 \quad \text{و} \quad \frac{12!}{10!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{10!} = \frac{12 \times 11}{1} = 132$$

$$\frac{9 \times 7!}{5 \times 8!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{5 \times 8!} = \frac{9 \times 7!}{5!} = \frac{9 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 9 \times 7 \times 6 = 378$$

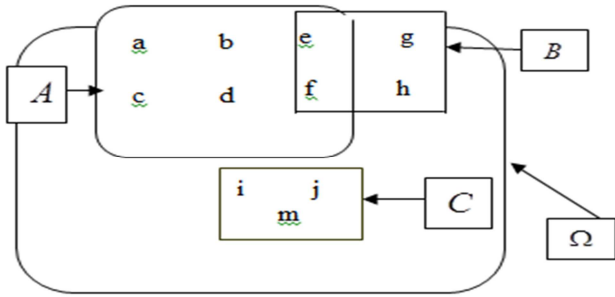
$$\frac{10^9}{5^8} = \frac{10 \times 10^8}{5^8} = 10 \times \left(\frac{10}{5}\right)^8 = 10 \times (2)^8 = 2560$$

$$\frac{A_9^4}{A_9^2} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{9 \times 8} = 7 \times 6 = 42$$

$$\frac{9 \times 5!}{8 \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 5!}{8 \times 3!} = \frac{9 \times 5!}{3!} = \frac{9 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 9 \times 5 \times 4 = 180$$

تمرين 18: الخطاطة جانبه تبين توزيع تلاميذ أحد الأقسام حسب

الممارسة الرياضية :



الفئة A يمارسون كرة القدم

الفئة B يمارسون كرة اليد

الفئة C يمارسون كرة السلة

نختار عشوائيا احد التلاميذ من هذا القسم

(1) أكتب A و B و C و Omega و A-bar و B-bar و C-bar و A ∩ B و A ∪ B و A ∩ C و A ∪ C بالتفصيل

(2) أحسب P(A) و P(B) و P(C) و P(A ∩ B) و P(A ∩ C) و P(A ∪ B) و P(A ∪ C)

(3) قارن P(A-bar) و 1 - P(A) و قارن P(C) و 1 - P(C)

(4) تحقق أن P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

(5) تحقق أن P(A ∪ C) = P(A) + P(C)

(الجواب: 1) B = {e; f; g; h} A = {a; b; c; d; e; f}

Omega = {a; b; c; d; e; f; g; h; i; j; m} C = {i; j; m}

C-bar = {a; b; c; d; e; f; g; h} A-bar = {g; h; i; j; m}

A ∪ B = {a; b; c; d; e; f; g; h} A ∩ B = {e; f}

A ∪ C = {a; b; c; d; e; f; i; j; m} A ∩ C = ∅

(2) A ∩ B هو العناصر التي تنتمي الى المجموعتين

A و B في نفس الوقت اذن : A ∩ B = {7; 1; 6}

A ∪ B هو العناصر التي تنتمي الى المجموعة A أو تنتمي الى B

$$A \cup B = \left\{0; 1; 2; 6; 7; \frac{3}{4}\right\}$$

و A-bar هي العناصر التي تنتمي الى E ولا تنتمي الى المجموعة A

$$\bar{A} = \left\{2; 5; \frac{3}{4}\right\}$$

(3) عدد أجزاء E التي تحتوي على ثلاث عناصر هو :

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 35$$

(4) عدد أجزاء E التي تحتوي على خمسة عناصر هو :

$$C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2!} = 21$$

تمرين 16: أحسب C₁₁³ و C₁₂⁴ و C₈³ و C₆² و

$$C_8^4 \text{ و } C_8^5$$

$$\text{و } C_{10}^1 \text{ و } C_8^8 \text{ و } C_{12}^0 \text{ و } C_{11}^8$$

الأجوبة :

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2!4!} = \frac{6 \times 5}{2!} = 15$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{4!(12-4)!} = \frac{12!}{8!4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8!4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 990$$

$$C_{11}^3 = \frac{11!}{3!(11-3)!} = \frac{11!}{8!3!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8!3!} = \frac{11 \times 2 \times 5 \times 3 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

نلاحظ أن : C₈³ = C₈⁵ حسب الخاصية : C_n^p = C_n^{n-p}

نلاحظ كذلك أن : C₆⁴ = C₆² = 15

C₁₀¹ = 10 حسب الخاصية : C_n¹ = n

C₈⁸ = 1 حسب الخاصية : C_nⁿ = 1

C₁₂⁰ = 1 حسب الخاصية : C_n⁰ = 1

نلاحظ أن : C₁₁³ = C₁₁⁸ = 165 حسب الخاصية : C_n^p = C_n^{n-p}

تمرين 17: أحسب A₇³ و A₈⁵ و $\frac{12!}{10!}$ و $\frac{12 \times 7!}{10 \times 8!}$

$$\frac{9 \times 5!}{8 \times 3!} \text{ و } \frac{A_9^4}{A_9^2} \text{ و } \frac{10^9}{5^8} \text{ و } \frac{9 \times 7!}{5 \times 8!}, \frac{8 \times 3}{7!} \text{ و } \frac{A_8^2 \times A_{10}^4}{A_8^5}$$

الأجوبة : A₈⁵ = 8 × 7 × 6 × 5 × 4 = 6720 A₇³ = 7 × 6 × 5 = 210

$$\frac{A_6^3 \times A_{10}^4}{A_{10}^5} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{5 \times 4}{1} = 20$$

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب قرص يحمل الرقم 1 " A

" سحب قرص يحمل الرقم 3 " B

" سحب قرص يحمل رقم زوجي " C

" سحب رقم أصغر من أو يساوي 2 " D " سحب

قرص لا يحمل الرقم 1 " E

الجواب:1 $card(\Omega) = 12$ وهو ببساطة عدد الكرات في

الصندوق

$$p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{0}{12} = 0$$

$$p(D) = \frac{CardD}{Card\Omega} = \frac{5}{12} \quad p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

E هو الحدث المضاد للحدث A أي $\bar{A} = E$ ومنه

$$p(E) = p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

تمرين 22: يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء

نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق في آن واحد

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين " B " سحب كرتين حمراوين " R

" سحب كرتين من نفس اللون " M

" سحب كرتين من لون مختلف " D

$$\frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2!6!} = \frac{8 \times 7}{2!} = 28 \quad \text{الأجوبة:1}$$

$$card(\Omega) = C_8^2$$

$$p(R) = \frac{CardR}{Card\Omega} = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28} \quad p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$$

سحب كرتين من نفس اللون أي سحب كرتين بيضاوين أو كرتين

$$p(M) = \frac{CardM}{Card\Omega} = \frac{C_3^2 + C_5^2}{C_8^2} = \frac{3 + 10}{28} = \frac{13}{28}$$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $\bar{M} = D$ ومنه

$$p(D) = p(\bar{M}) = 1 - p(M) = 1 - \frac{13}{28} = \frac{15}{28}$$

تمرين 23: يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق في آن واحد

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب ثلاث كرات بيضاء " B " سحب ثلاث كرات سوداء " N

" سحب ثلاث كرات حمراء " R "

$$p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{4}{11} \quad p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{6}{11} \quad (2)$$

$$p(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card\Omega} = \frac{2}{11} \quad p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{3}{11}$$

$$p(A \cap C) = \frac{Card(A \cap C)}{Card\Omega} = \frac{0}{11} = 0 \quad p(A \cup B) = \frac{Card(A \cup B)}{Card\Omega} = \frac{8}{11}$$

$$p(\bar{A}) = \frac{Card\bar{A}}{Card\Omega} = \frac{5}{11} \quad p(A \cup C) = \frac{Card(A \cup C)}{Card\Omega} = \frac{9}{11}$$

$$p(\bar{C}) = \frac{Card\bar{C}}{Card\Omega} = \frac{8}{11}$$

$$1 - p(A) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} = p(\bar{A}) \quad (3)$$

$$1 - p(C) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{11} + \frac{4}{11} - \frac{2}{11} = \frac{8}{11} = P(A \cup B) \quad (4)$$

$$P(A) + P(C) = \frac{6}{11} + \frac{3}{11} = \frac{9}{11} = P(A \cup C) \quad (5)$$

تمرين 19: A و B حدثان مرتبطان بنفس التجربة العشوائية بحيث:

$$p(A) = 0,7 \quad p(B) = 0,4 \quad p(A \cap B) = 0,3$$

أحسب: $p(\bar{A})$ و $p(\bar{B})$ و $p(A \cup B)$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,7 = 0,3 \quad \text{الجواب:}$$

$$p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= 0,7 + 0,4 - 0,3 = 0,8$$

تمرين 20: يحتوي صندوق غير كاشف على 5 كرات بيضاء و 3 كرات

كرات سوداء و كرتين حمراوين

نسحب عشوائيا من الصندوق كرة واحدة

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

3. " سحب كرة بيضاء " B و " سحب كرة سوداء " N

" سحب كرة حمراء " R و " عدم سحب كرة سوداء " D

الجواب:1 $card(\Omega) = 10$ وهو ببساطة عدد الكرات في

الصندوق

$$p(N) = \frac{CardN}{Card\Omega} = \frac{3}{10} \quad p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$p(R) = \frac{CardR}{Card\Omega} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

D هو الحدث المضاد للحدث N أي $\bar{N} = D$ ومنه

$$p(D) = p(\bar{N}) = 1 - p(N) = 1 - 0,3 = 0,7$$

تمرين 21: يحتوي صندوق غير كاشف على أقراص مرقمة :

قرصان منهم يحملان الرقم 1 و ثلاث أقراص منهم يحملون الرقم 2

و سبعة أقراص تحمل الرقم 4

نسحب عشوائيا من الصندوق قرصا واحدا

$$C_n^{n-1} = n : \text{لأننا نعلم ن: } p(R) = \frac{\text{Card}R}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_4^3}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

سحب 3 كرات من لون مختلف يعني سحب كرة واحدة حمراء و كرة واحدة سوداء واحدة بيضاء

$$p(D) = \frac{\text{Card}D}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_3^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{120} = \frac{3 \times 4 \times 4}{120} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

M هو الحدث المضاد للحدث D أي $M = \bar{D}$ ومنه

$$p(M) = p(\bar{D}) = 1 - p(D) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

سحب كرة واحدة سوداء فقط يعني كرة واحدة سوداء وكرتين غير سوداوين يعني مسحوبة من بين الألوان الأخرى

$$p(E) = \frac{\text{Card}E}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_3^1 \times C_7^2}{120} = \frac{3 \times C_7^2}{120}$$

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2!5!} = \frac{7 \times 6}{2!} = 21 \quad \text{نحسب } C_7^2$$

$$p(E) = \frac{3 \times 21}{120} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40} \quad \text{ومنه}$$

سحب كرتين حمراوين فقط يعني سحب كرتين حمراوين و كرة ثالثة من بين الألوان الأخرى

$$\text{لأن: } p(F) = \frac{\text{Card}F}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_6^1 \times C_4^2}{120} = \frac{6 \times C_4^2}{120} = \frac{6 \times 6}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2!} = 6$$

الحدث المضاد للحدث " سحب كرة بيضاء على الأقل G " هو:

" عدم سحب أي كرة بيضاء " \bar{G} يعني سحب كرة من بين الألوان المتبقية

$$\text{نحسب احتمال الحدث } \bar{G} \text{ : إذن } p(\bar{G}) = \frac{C_7^3}{120} \text{ ونحسب } C_7^3$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

$$\text{ومنه: } p(\bar{G}) = \frac{35}{120} = \frac{7}{24} \text{ ونعلم:}$$

$$p(G) = 1 - p(\bar{G}) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24} \text{ يعني: } p(G) + p(\bar{G}) = 1$$

تمرين 25:

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق:

1. حدد $\text{card}(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانات

2. حدد احتمال الأحداث التالية:

" سحب كرتين بيضاوين B " " سحب كرتين سوداوين N "

" سحب كرتين من نفس اللون M " " سحب كرتين من لون مختلف D "

" سحب كرة واحدة بيضاء E "

سحب ثلاث كرات من لون مختلف D "

" سحب ثلاث كرات من نفس اللون M "

" سحب كرتين بيضاوين فقط E "

(الجواب: 1) $\text{card}(\Omega) = C_{12}^3$ ومنه

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3!9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} = \frac{6 \times 2 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

$$p(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_4^3}{28} = \frac{4}{28} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \quad (2)$$

$$p(R) = \frac{\text{Card}R}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_5^3}{28} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} \quad \text{و } p(N) = \frac{\text{Card}N}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_3^3}{28} = \frac{1}{28}$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$$

سحب 3 كرات من لون مختلف يعني سحب كرة واحدة حمراء و واحدة سوداء كرة واحدة بيضاء

$$p(D) = \frac{\text{Card}D}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_3^1 \times C_4^1 \times C_5^1}{28} = \frac{3 \times 4 \times 5}{28} = \frac{15}{28} = \frac{3}{11}$$

M هو الحدث المضاد للحدث D أي $M = \bar{D}$ ومنه

$$p(M) = p(\bar{D}) = 1 - p(D) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11} = \frac{2}{7}$$

$$p(E) = \frac{\text{Card}E}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_4^2 \times C_8^1}{220} = \frac{6 \times 8}{220} = \frac{12}{55}$$

تمرين 24: يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق في آن واحد

1. حدد $\text{card}(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانات

2. حدد احتمال الأحداث التالية:

" سحب ثلاث كرات بيضاء B " " سحب ثلاث كرات حمراء R "

" سحب ثلاث كرات من لون مختلف D " " سحب ثلاث كرات من نفس اللون M "

" سحب كرة واحدة سوداء فقط E " " سحب كرتين حمراوين فقط F "

" سحب كرة بيضاء على الأقل G "

(الأجوبة: 1) $\text{card}(\Omega) = C_{10}^3$

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = \frac{5 \times 2 \times 3 \times 3 \times 8}{6} = 120$$

$$C_n^n = 1 : \text{لأننا نعلم ن: } p(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120} \quad (2)$$

$$p(E) = \frac{3A_4^2 \times A_5^1}{9 \times 8 \times 7} = \frac{3 \times 4 \times 3 \times 5}{9 \times 8 \times 7} = \frac{5}{14}$$

تمرين 27: يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال كرتين من الصندوق :

- حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانات
- حدد احتمال الأحداث التالية :
 - " سحب كرتين بيضاوين " B
 - " سحب كرتين سوداوين " N
 - " سحب كرتين من نفس اللون " M
 - " سحب كرتين من لون مختلف " D
 - " سحب كرة واحدة بيضاء " E

$$card(\Omega) = 7 \times 7 = 7^2 = 49 \quad \text{(الجواب: 1)}$$

$$p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{3 \times 3}{49} = \frac{9}{49} \quad (2)$$

$$p(M) = \frac{CardM}{Card\Omega} = \frac{3 \times 3 + 4 \times 4}{7 \times 7} = \frac{25}{49} \quad p(N) = \frac{CardN}{Card\Omega} = \frac{4 \times 4}{7 \times 7} = \frac{16}{49}$$

$D = \overline{M}$ أي $D = \overline{M}$ ومنه

$$p(D) = p(\overline{M}) = 1 - p(M) = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$$

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الأولى	السحبة الثانية
B	\overline{B}	B	\overline{B}

حساب احتمال الحدث E : هناك حالتين

$$p(E) = \frac{3 \times 4 + 3 \times 4}{42} = \frac{2 \times 3 \times 4}{7 \times 7} = \frac{24}{49}$$

تمرين 28: يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء بحيث: كرتين

تحملان الرقم 1 و ثلاث كرات تحمل الرقم 2 وكذلك يحتوي على 7 كرات سوداء بحيث 4 كرات تحمل الرقم 2 و ثلاث كرات تحمل

الرقم 1 لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس.

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق.

نعتبر الأحداث التالية: "الكرة المسحوبة بيضاء": B

"الكرة المسحوبة سوداء": N

"الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1": U

"الكرة المسحوبة تحمل الرقم 2": D

(1) أحسب احتمال الأحداث التالية: B و N و U و D و $B \cap U$ و

$N \cap D$ و

(2) إذا كانت أو علما أن الكرة المسحوبة بيضاء فما هو الاحتمال

لكي تكون حاملة للرقم 1

$$(ب) \text{ قارن : } P_B(U) \text{ و } \frac{P(B \cap U)}{P(B)}$$

(3) إذا كانت أو علما أن الكرة المسحوبة سوداء فما هو الاحتمال

لكي تكون حاملة للرقم 2

$$(ب) \text{ قارن : } P_N(D) \text{ و } \frac{P(D \cap N)}{P(N)}$$

(4) علما أن الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 فما هو الاحتمال سحب

كرة بيضاء

$$\text{أجوبة: (1) } card(\Omega) = 12 \text{ و } P(D) = \frac{7}{12} \text{ و } P(U) = \frac{7}{12}$$

$$\text{و } P(B) = \frac{5}{12} \text{ و } P(U) = \frac{5}{12}$$

$$card(\Omega) = A_7^2 = 7 \times 6 = 42 \quad \text{(الجواب: 1)}$$

$$p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{A_3^2}{42} = \frac{3 \times 2}{7 \times 6} = \frac{1}{7} \quad (2)$$

$$p(N) = \frac{CardN}{Card\Omega} = \frac{A_4^2}{42} = \frac{4 \times 3}{7 \times 6} = \frac{2 \times 2 \times 3}{7 \times 6} = \frac{2}{7}$$

$$p(M) = \frac{CardM}{Card\Omega} = \frac{A_4^2 + A_3^2}{42} = \frac{4 \times 3 + 3 \times 2}{7 \times 6} = \frac{18}{7 \times 6} = \frac{3 \times 6}{7 \times 6} = \frac{3}{7}$$

$D = \overline{M}$ أي $D = \overline{M}$ ومنه

$$p(D) = p(\overline{M}) = 1 - p(M) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

حساب احتمال الحدث E : هناك حالتين

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الأولى	السحبة الثانية
B	\overline{B}	B	\overline{B}

$$p(E) = \frac{2A_3^1 \times A_4^1}{42} = \frac{2 \times 3 \times 4}{7 \times 6} = \frac{4}{7}$$

تمرين 26: يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب ثلاث كرات بيضاء " B

" سحب ثلاث كرات سوداء " N

" سحب ثلاث كرات من نفس اللون " M

" سحب ثلاث كرات من لون مختلف " D

" سحب كرتين بيضاوين فقط " E

$$card(\Omega) = A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504 \quad \text{(الجواب: 1)}$$

$$p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{A_4^3}{504} = \frac{4 \times 3 \times 2}{9 \times 8 \times 7} = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 3 \times 8 \times 7} = \frac{1}{21} = \frac{1}{21} \quad (2)$$

$$p(N) = \frac{CardN}{Card\Omega} = \frac{A_5^3}{504} = \frac{5 \times 4 \times 3}{9 \times 8 \times 7} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 3 \times 4 \times 2 \times 7} = \frac{5}{42} = \frac{5}{42}$$

$$p(M) = \frac{CardM}{Card\Omega} = \frac{A_4^3 + A_5^3}{504} = \frac{4 \times 3 \times 2 + 5 \times 4 \times 3}{504} = \frac{24 + 60}{504} = \frac{84}{504} = \frac{1}{6}$$

$D = \overline{M}$ أي $D = \overline{M}$ ومنه

$$p(D) = p(\overline{M}) = 1 - p(M) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

حساب احتمال الحدث E : هناك 3 حالات

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الثالثة
B	B	\overline{B}

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الثالثة
\overline{B}	B	B

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الثالثة
B	\overline{B}	B

نلاحظ أن هذه التجربة مكونة من اختبارين: أحدهما هو سحب كرة الصندوق A ، والآخر هو سحب كرة من الصندوق B وأن الاحتمالات المرتبطة بأحد الاختبارين لا تتعلق بنتائج الاختبار الآخر. نقول في هذه الحالة إن هذه التجربة مكونة من اختبارين مستقلين. باعتبار الحدثين: E_1 "سحب كرة بيضاء من A " و E_2 "سحب كرة سوداء من B " يكون احتمال الحدث E هو جداء احتمال الحدثين E_1 و E_2 يعني: $p(E) = p(E_1) \times p(E_2)$.

و بما أن: $p(E_1) = \frac{3}{7}$ و $p(E_2) = \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$ فإن:

$$p(E) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{35}$$

تمرين 31: يحتوي صندوق على:

ثلاثة كرات تحمل الرقم 1 و كرة واحدة تحمل الرقم 0 و الكرات المتبقية تحمل الرقم 2.

نسحب عشوائيا كرتين تانبا.

و ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأرقام الموجودة على الكرتين المسحوبتين.

إذا افترضنا أن هناك تساوي الاحتمال لكل السحبات:

(1) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

(2) حدد قانون احتمال X .

(3) حدد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل X .

الأجوبة: (1) تحديد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

يمكننا مثلا سحب كرتين تحملان الرقم 1 اذن الجداء هو 1

يمكننا مثلا سحب كرتين تحملان الرقم 2 اذن الجداء هو 4

من بين الكرات المسحوبة كرة تحمل الرقم 0 ومنه الجداء هو 0
يمكننا مثلا سحب كرة تحمل الرقم 1 و كرة تحمل الرقم 2 اذن الجداء هو 2

ليس هناك امكانيات أخرى

اذن جميع القيم هي: 0 و 1 و 2 و 4

نكتب: $X(\Omega) = \{0; 1, 2, 4\}$

(2) تحديد قانون احتمال X .

■ الحدث: "من بين الكرات المسحوبة كرة تحمل الرقم 0" بالرمز:

$$(X = 0)$$

$(X = 0)$ يعني " جداء الأرقام الموجودة على الكرتين المسحوبتين يساوى الصفر"

نحسب احتمال الحدث: $(X = 0)$

$$P(X = 0) = \frac{C_1^1 \times C_7^1}{C_8^2} = \frac{1 \times 7}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

الحدث: "سحب كرتين تحملان الرقم 1" بالرمز: $(X = 1)$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$$

الحدث: "سحب كرة تحمل الرقم 1 و كرة تحمل الرقم 2" بالرمز:

$$(X = 2)$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_8^2} = \frac{3 \times 4}{28} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

الحدث: "سحب كرتين تحملان الرقم 2" بالرمز: $(X = 4)$

$$P(X = 4) = \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

$$P(N \cap D) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ و } P(B \cap U) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(B \cap U) = \frac{2}{12} = \frac{2}{5} = P_B(U) \text{ (ب) (2) } P_B(U) = \frac{2}{5} \text{ (أ) (2)}$$

$$P(D \cap N) = \frac{4}{12} = \frac{4}{7} = P_N(D) \text{ (ب) (2) } P_N(D) = \frac{4}{7} \text{ (أ) (3)}$$

اذن نلاحظ أن: $\frac{P(D \cap N)}{P(N)} = P_N(D)$ أي

$$P(N \cap D) = P(N)P_N(D)$$

$P_N(D)$: يقرأ كذلك احتمال الحدث D علما أن الحدث N محقق

أو يقرأ احتمال سحب كرة تحمل الرقم 2 علما أنها سوداء

(4) علما أن الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 و الاحتمال سحب كرة بيضاء هو:

$$P_U(B) = \frac{P(U \cap B)}{P(U)} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$$

تمرين 29: نرمي نردا أوجه الستة مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة

ونعتبر الحدثين التاليين:

" ظهور رقم زوجي A " و " ظهور رقم مضاعف للعدد 3 B "

(1) حدد احتمال الأحداث التالية: A و B و $A \cap B$ و $P_B(A)$

(2) فارن: $p(A \cap B)$ و $p(A) \times p(B)$

أجوبة: $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ و $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

" ظهور رقم زوجي و مضاعف للعدد 3 $A \cap B$ "

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \text{ و } p(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

(2) نلاحظ أن: $p(A) \times p(B) = p(A \cap B)$

نقول إن الحدثين A و B مستقلان

تمرين 30: نعتبر صندوقين A و B بحيث يحتوي الصندوق A

على 7 كرات: 3 بيضاء و 4 سوداء يحتوي الصندوق B على 10

كرات: 4 بيضاء و 6 سوداء.

لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس.

نقوم بالتجربة التالية: نسحب كرة من الصندوق A و كرة من

الصندوق B .

أحسب احتمال الحدث E : "الحصول على كرة بيضاء من A و

على كرة سوداء من B "

الجواب:

المغايرة هي: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$V(X) = \left((-1)^2 \times \frac{1}{3} \right) + \left(0^2 \times \frac{1}{4} \right) + \left(2^2 \times \frac{1}{4} \right) + \left(4^2 \times \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{5}{6} \right)^2$$

$$V(X) = \frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - \frac{25}{36} = 4 - \frac{25}{36} = \frac{144 - 25}{36} = \frac{119}{36}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{119}{36}} \text{ ومنه:}$$

تمرين 33: يحتوي صندوق على 6 كرات تحمل الأرقام: 0, 1, 1, 2, 2, 2, , لا يمكن التمييز بينها باللمس. نسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق. ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية.

ليكن Y المتغير العشوائي التي يربط كل نتيجة **بمجموع** رقمي الكرتين المسحوبتين

(1) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y .

(2) حدد قانون احتمال Y .

(3) حدد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Y

أجوبة:

(1) إذا كانت الكرتان المسحوبتان تحملان الرقمين 0 و 1 على

التوالي فان: $x = 1 + 0 = 1$

و إذا كانتا تحملان الرقمين 1 و 2 على التوالي فان $x = 1 + 2 = 3$ و هي القيم الممكنة تسمى القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y و هي

تكون مجموعة نرمرز لها بالرمز $Y(\Omega)$

اذن لدينا: $Y(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\}$

(2) لنحدد قانون احتمال المتغير العشوائي Y .

لدينا: $Y(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\}$

■ $(X = 1)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 0, و على كرة

تحمل الرقم 1

$$\cdot p(Y = 1) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}$$

■ $(Y = 2)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 2, و على كرة

تحمل الرقم 0. أو الحصول على كرتين تحملان الرقم 1.

$$\text{اذن: } p(Y = 2) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_2^2}{C_6^2}$$

■ $(Y = 3)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 1, و على كرة

$$\text{تحمل الرقم 2. إذن. } p(Y = 3) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

■ $(Y = 4)$ يعني الحصول على كرتين تحملان الرقم 2, إذن:

$$p(Y = 4) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي Y في الجدول التالي:

اذن : هذه النتائج نلخصها فيجدول يسمى : **قانون احتمال X** .

$X(\Omega)$	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$	$\frac{6}{28} = \frac{3}{14}$

نلاحظ أن:

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 4) = 1$$

(3) **حساب الأمل الرياضي:** نرمرز له ب: $E(X)$

$$E(X) = 0 \times p(X = 0) + 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2) + 4 \times p(X = 4)$$

$$E(X) = \left(0 \times \frac{7}{28} \right) + \left(1 \times \frac{3}{28} \right) + \left(2 \times \frac{12}{28} \right) + \left(4 \times \frac{6}{28} \right) = \frac{3 + 24 + 24}{28} = \frac{51}{28}$$

حساب المغايرة: نرمرز له ب: $V(X)$

المغايرة هي: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= \left(0^2 \times \frac{7}{28} \right) + \left(1^2 \times \frac{3}{28} \right) + \left(2^2 \times \frac{12}{28} \right) + \left(4^2 \times \frac{6}{28} \right) - \left(\frac{51}{28} \right)^2$$

$$= \frac{3}{28} + \frac{48}{28} + \frac{96}{28} - \left(\frac{51}{28} \right)^2 = \frac{147}{28} - \left(\frac{51}{28} \right)^2 = \frac{4116}{28^2} - \frac{2601}{28^2}$$

$$V(X) = \frac{1515}{784}$$

حساب الانحراف الطرازي: $\sigma(X)$

الانحراف الطرازي هو $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1515}{784}}$$

تمرين 32: ليكن X متغيرا عشوائيا قانون احتماله معرف في الجدول التالي:

x_i	-1	0	2	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{6}$

(1) أحسب احتمال الحدث $(X = 2)$ أي قيمة a

(2) أحسب $E(X)$ و $\sigma(X)$.

الأجوبة: (1) تحديد $P(X = 2)$

نعم أن:

$$P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) = 1$$

$$\frac{3}{4} + a = 1 \text{ يعني أن: } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + a + \frac{1}{6} = 1$$

$$\text{يعني أن: } a = 1 - \frac{3}{4} \text{ يعني أن: } a = \frac{1}{4}$$

(2)

$$E(X) = \left(-1 \times \frac{1}{3} \right) + 0 \left(1 \times \frac{1}{4} \right) + \left(2 \times \frac{1}{4} \right) + \left(4 \times \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

حساب الانحراف الطرازي: $\sigma(X)$

الانحراف الطرازي هو $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$$p(Z=0) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{15}.$$

■ $(Z=1)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 1 و على كرة تحمل الرقم 2.

$$p(Z=1) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_1^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{4}{15}.$$

■ $(Z=2)$ يعني " الحصول على كرة تحمل الرقم 2 و على كرة تحمل الرقم 0.

$$p(Z=2) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{1}{15}.$$

■ $(Z=3)$ يعني " الحصول على كرة تحمل الرقم 2 و على كرة تحمل الرقم 1.

$$p(Z=3) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{1}{15}.$$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي Z في الجدول التالي:

x_i	1	2	3	4
$p(Y=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$

(3) تحديد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Y الأمل الرياضي هو:

$$E(Y) = \left(1 \times \frac{2}{15}\right) + \left(2 \times \frac{4}{15}\right) + \left(3 \times \frac{6}{15}\right) + \left(4 \times \frac{3}{15}\right) = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

■ المغايرة هي:

$$V(X) = E(Y^2) - (E(Y))^2 =$$

$$= \left(1^2 \times \frac{2}{15}\right) + \left(2^2 \times \frac{4}{15}\right) + \left(3^2 \times \frac{6}{15}\right) + \left(4^2 \times \frac{3}{15}\right) - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

تمرين 34:

يحتوي صندوق على 6 كرات تحمل الأرقام: $0, -1, -1, 1, 1, 2$ لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق. ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية.

ليكن Z المتغير العشوائي التي يربط كل نتيجة **بمجموع** رقمي الكرتين المسحوبتين

(1) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Z .

(2) حدد قانون احتمال Z .

(3) حدد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Z

أجوبة:

$$(1) (-1) + (-1) = (-2)$$

$$(-1) + (0) = (-1)$$

$$(-1) + (1) = (0)$$

$$(1) + (0) = (1) \text{ أو } (2) + (-1) = (1)$$

$$(2) + (0) = (2)$$

$$(2) + (1) = (3)$$

القيم الممكنة تسمى القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Z

$$Z(\Omega) = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

(2) لنحدد قانون احتمال المتغير العشوائي Z .

$$Z(\Omega) = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

■ $(Z=-2)$ يعني الحصول على كرتين تحملان -1

$$p(Z=-2) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$$

■ $(Z=-1)$ يعني " الحصول على كرة تحمل الرقم 1 و على كرة تحمل الرقم 0.

■ $(Z=0)$ يعني " الحصول على كرة تحمل الرقم 1 و على كرة تحمل الرقم 0.

$$p(Z=0) = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{3}{15}$$

■ $(Z=1)$ يعني " الحصول على كرة تحمل الرقم 1 و على كرة تحمل الرقم 0.

■ $(Z=2)$ يعني " الحصول على كرة تحمل الرقم 2 و على كرة تحمل الرقم 0.

(3) تحديد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Z الأمل الرياضي هو:

$$E(Z) = \left(-2 \times \frac{3}{15}\right) + \left(-1 \times \frac{3}{15}\right) + \left(0 \times \frac{3}{15}\right) + \left(1 \times \frac{4}{15}\right) + \left(2 \times \frac{1}{15}\right) + \left(3 \times \frac{1}{15}\right)$$

$$E(Z) = \left(-\frac{6}{15}\right) + \left(-\frac{3}{15}\right) + \left(\frac{4}{15}\right) + \left(\frac{2}{15}\right) + \left(\frac{3}{15}\right) = 0$$

■ المغايرة هي: $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$

$$V(Z) = \left((-2)^2 \times \frac{3}{15}\right) + \left((-1)^2 \times \frac{3}{15}\right) + \left(0^2 \times \frac{3}{15}\right)$$

$$+ \left(1^2 \times \frac{4}{15}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{15}\right) + \left(3^2 \times \frac{1}{15}\right) - (0)^2$$

$$V(Z) = \left(\frac{12}{15}\right) + \left(\frac{3}{15}\right) + \left(\frac{4}{15}\right) + \left(\frac{4}{15}\right) + \left(\frac{9}{15}\right) = \frac{32}{15}$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{\frac{32}{15}}$$

تمرين 35: يحتوي كيس على تسع بيدات مرقمة من 1 إلى 9 و لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 بيدات من الكيس

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل ممكنة لثلاث بيدات

بعدد البيدات التي تحمل رقما فرديا

(1) حدد قانون احتمال X .

(2) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و المغايرة $V(X)$

أجوبة:

(1)

تمرين 36:

I. نعتبر الاختبار التالي:

نرمي نردا مكعبا أوجهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 ونعتبر الحدث التالي: "الحصول على عدد قابل للقسمة على 3" A

أحسب $p(A) = p$ احتمال الحدث A و $p(\bar{A}) = p$ احتمال الحدث \bar{A}

II. نكرر الاختبار السابق أربع مرات متتالية:

أي نرمي النرد 4 مرات: عدد المرات هو: $n = 4$ ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A (خلال $n = 4$ اختبار).
(1) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي
(2) حدد قانون احتمال X .
(3) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و المغايرة $V(X)$.

أجوبة:

(1) نعتبر الاختبار التالي:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(2) المتغير العشوائي X هو متغير عشوائي حداني وسيطاه هما

$$p = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad n = 4$$

ولدينا القاعدة التالية:

$$p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

تحديد قانون احتمال X .

$$p(X = 0) = C_4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 \times 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$p(X = 1) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

$$p(X = 2) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \times \frac{1}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

$$p(X = 3) = C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 4 \times \frac{1}{27} \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$$

$$p(X = 4) = C_4^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{81} = \frac{1}{81}$$

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

(3)

حساب الأمل الرياضي $E(X)$ و المغايرة $V(X)$

بما أن المتغير العشوائي X هو متغير عشوائي حداني وسيطاه هما

$$p = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad n = 4$$

فان: $E(X) = np$ و $V(X) = np(1-p)$

■ الأمل الرياضي هو: $E(X) = np = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

في ثلاث البيدقات المسحوبة يمكننا عدم سحب أي بيدقة تحمل رقما فرديا أي عدد البيدقت الفردية يساوي 0

أو يمكننا سحب بيدقة واحدة تحمل رقما فرديا أي عدد البيدقت الفردية يساوي 1

أو يمكننا سحب بيدقتين تحملان رقما فرديا أي عدد البيدقت الفردية يساوي 2

أو يمكننا سحب ثلاثة تحمل رقما فرديا أي عدد البيدقت الفردية يساوي 3

اذن القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X هي:

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$$

(2) لنحدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\} \quad \text{لدينا:}$$

■ $(X = 0)$ يعني الحصول ثلاث البيدقات تحمل رقما زوجيا

$$\text{اذن } p(X = 0) = \frac{A_4^3}{A_9^3} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}$$

■ $(X = 1)$ يعني "الحصول على بيدقة واحدة تحمل رقما فرديا"

$$\text{اذن: } p(X = 1) = \frac{C_3^1 \times A_4^2 \times A_5^1}{A_9^3} = \frac{15}{42}$$

■ $(X = 2)$ يعني "الحصول على بيدقتين تحملان رقما فرديا"

$$\text{اذن: } p(X = 2) = \frac{C_3^2 \times A_4^1 \times A_5^2}{A_9^3} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$$

■ $(X = 3)$ يعني "الحصول على ثلاث بيدقات تحمل رقما فرديا"

$$\text{اذن: } p(X = 3) = \frac{A_5^3}{A_9^3} = \frac{5}{42}$$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي X في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{5}{42}$

(3) تحديد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل X

■ الأمل الرياضي هو:

$$E(X) = \left(0 \times \frac{2}{42}\right) + \left(1 \times \frac{15}{42}\right) + \left(2 \times \frac{20}{42}\right) + \left(3 \times \frac{5}{42}\right) = \frac{5}{3}$$

■ المغايرة هي: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$V(X) = \left((0)^2 \times \frac{2}{42}\right) + \left((1)^2 \times \frac{15}{42}\right) + \left((2)^2 \times \frac{20}{42}\right) + \left((3)^2 \times \frac{5}{42}\right) - \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}$$

■ الانحراف الطرازي هو: $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2} \quad (3)$$

$$V(X) = \frac{1}{8} \times \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{8} \times \left(3 - \frac{2}{3}\right)^2$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad V(X) = \frac{3}{4}$$

تمرين 40: يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 12 سوداء و 3 حمراء .

نسحب 8 كرات بالتتابع بإحلال

نعتبر الحدث B : " الحصول على 6 كرات بيضاء بالضبط "

1) احسب $P(B)$

2) نعتبر X : " عدد المرات التي تكون فيها الكرة بيضاء "

احسب $E(X)$ ؛ $V(X)$

أجوبة: 1) الاختبار هو سحب كرة واحدة .

يعاد الاختبار $n = 8$ مرة .

نحن أمام اختبار واحد يتكرر ثمانية مرات متتابعة :

A : " الحصول على كرة بيضاء "

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

أي أمام متغير عشوائي حداني وسيطاه هما $n = 8$ و $p = \frac{1}{4}$

B : " وقوع A $k = 6$ مرة "

$$P(B) = P(X = 6) = C_8^6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{8-6}$$

$$P(B) = P(X = 6) = C_8^6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

2) X متغير عشوائي حداني وسيطاه $n = 8$ و $p = \frac{1}{4}$

$$\text{إذن : } E(X) = 8 \times \frac{1}{4}$$

$$V(X) = 8 \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

تمرين 41: يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 2 حمراء .

نسحب من الصندوق 5 كرات .

X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بمجموع الكرات البيضاء "

الحدث A : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

1- حدد $X(\Omega)$

2- احسب $card A$: $p(X = 2)$ في كل حالة :

أ- السحب تانيا

ب - السحب بالتتابع بإحلال

ج - السحب بالتتابع بدون إحلال

الجواب (1): $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

2) (أ) السحب تانيا : $card\Omega = C_{11}^5$

نعتبر الحدث \bar{A} : " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

$$V(X) = np(1-p) = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9} \quad \text{■ المغيرة هي:}$$

تمرين 37: نرمي قطعة نقدية غير مزيفة ثلاث مرات متتابعة

ونعتبر الحدث التالي : " ظهور الوجه F A "

أحسب احتمال الحدث التالي :

" ظهور الوجه F مرتين بالضبط B "

الجواب: نحن أمام اختبار واحد يتكرر ثلاث مرات متتابعة :

أي أمام متغير عشوائي حداني وسيطاه هما $n = 3$ و $p = \frac{1}{2}$

نستعمل القاعدة التالية : $n = 3$ حيث $p(A) = \frac{1}{2}$

$$p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{0; 1; 2; 3\}$$

$$p(X = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

تمرين 38: الاحتمال لكي يصيب رام الهدف هو : $\frac{2}{3}$

قام هذا الرامي ب5 محاولات :

أحسب احتمال الحدث التالي :

" الرامي يصيب الهدف أربع مرات بالضبط B "

الجواب: نحن أمام اختبار واحد يتكرر خمسة مرات متتابعة :

أي أمام متغير عشوائي حداني وسيطاه هما $n = 5$ و $p = \frac{2}{3}$

نستعمل القاعدة التالية : $n = 5$ حيث $p(A) = \frac{2}{3}$

$$p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$p(X = 4) = C_5^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 5 \left(\frac{16}{243}\right) = \frac{80}{243}$$

تمرين 39: نرمي قطعة نقدية 3 مرات متتالية

X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات الذي

يظهر فيها الوجه P "

1- حدد $card\Omega$ ؛ $X(\Omega)$

2- حدد قانون احتمال X

3- احسب $\sigma(X)$ ؛ $V(X)$ ؛ $E(X)$

أجوبة (1): $card\Omega = 2^3 = 8$

$\Omega = \{FFF; FFP; FPF; PFF; FPP; PFP; PPF; PPP\}$

$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

$$P(X = 0) = \frac{1}{8} \quad \text{إذن : } (X = 0) = \{FFF\} \quad (2)$$

$$(X = 1) = \{FFP; FPF; PFF\}$$

$$\text{إذن : } P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

$$\text{نجد : } P(X = 3) = \frac{1}{8} \quad ; \quad P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

$X(\Omega)$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4} \quad \text{إذن:}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B - A) \quad \text{نعلم أن:}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \quad \text{و:}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \quad \text{إذن:}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{12} \quad \text{ومنه:}$$

$$\text{لدينا: } card\bar{A} = C_6^5 \quad \text{إذن: } cardA = C_{11}^5 - C_6^5$$

$$p(X=2) = \frac{C_5^2 \times C_6^3}{C_{11}^5}$$

$$card\Omega = 11^5 \quad \text{ب) السحب بالتتابع بإحلال:}$$

نعتبر الحدث \bar{A} : "عدم الحصول على أي كرة بيضاء"

$$\text{لدينا: } card\bar{A} = 6^5 \quad \text{إذن: } cardA = 11^5 - 6^5$$

$$p(X=2) = C_5^2 \frac{5^2 6^3}{11^5} \quad \text{أو: } p(X=2) = C_5^2 \left(\frac{5}{11}\right)^2 \left(\frac{6}{11}\right)^3$$

$$card\Omega = A_{11}^5 \quad \text{ج) السحب بالتتابع بدون إحلال:}$$

نعتبر الحدث \bar{A} : "عدم الحصول على أي كرة بيضاء"

$$\text{لدينا: } card\bar{A} = A_6^5 \quad \text{إذن: } cardA = A_{11}^5 - A_6^5$$

$$p(X=2) = C_5^2 \frac{A_5^2 A_6^3}{A_{11}^5}$$

تمرين 42: يحتوي صندوق على 6 كرات سوداء و 3 حمراء.

نسحب من الصندوق كرتين بالتتابع بدون إحلال .

نعتبر: الحدث A : "الكرة الأولى سوداء"

الحدث B : "الكرة الثانية حمراء"

أ- حدد: $P(A \cap B); P(B); P(A)$

ب- هل A و B مستقلان؟

ج- احسب: $P(\bar{A} \cap B), P(A \cup B), P_B(A)$

الأجوبة:

$$\text{أ) } card\Omega = 9 \times 8 = 72$$

الحدث A : NX (X سوداء أو حمراء)

$$card(A) = 6 \times 8 = 48$$

$$p(A) = \frac{2}{3} \quad \text{أو مباشرة } p(A) = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}$$

الحدث B : NR أو RR

$$card(B) = 3 \times 2 + 6 \times 3 = 24$$

$$p(B) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} \quad \text{أو مباشرة } p(B) = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$$

$$\text{إذن: } p(B) = \frac{1}{3}$$

الحدث $A \cap B$: "الأولى سوداء و الثانية حمراء" NR

$$\text{إذن: } P(A \cap B) = \frac{6 \times 3}{9 \times 8} \quad \text{ومنه: } P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$\text{نعلم أن: } P_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad \text{إذن: } P_A(B) = \frac{3}{8}$$

ب) A و B غير مستقلان

لأن: $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

أو لأن: $p_A(B) \neq p(B)$

$$\text{ج) نعلم أن: } P_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad \text{إذن: } P_B(A) = \frac{3}{4}$$

$$\text{نعلم أن: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$