

Chute verticale d'un corps solide



I. CHUTE VERTICALE AVEC FROTTEMENT

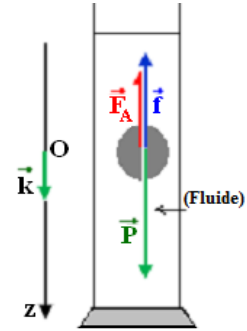
1. Rappel

Le mobile est soumis à trois forces

- Poids : $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \cdot g \cdot \vec{k}$
- Poussée d'Archimède : $\vec{F}_A = -m_f \cdot g \cdot \vec{k}$ avec m_f : masse du fluide déplacé
- Forces de frottements fluide : $\vec{f} = -k \cdot v_G^n \cdot \vec{k}$ avec k est une constante

Caractéristiques des forces :

	Direction :	Sens :	Intensité :	Composante sur Oz
\vec{P}	La verticale (parallèle à l'axe Oz)	Vers le bas	$P = m \cdot g$	$P_z = m \cdot g$
\vec{F}_A		Vers le haut	$F_A = m_f \cdot g$	$F_{Az} = -m_f \cdot g$
\vec{f}		Vers le haut	$f = k \cdot V^n$	$f_z = -k \cdot V^n$



2. Equation différentielle vérifiée par la vitesse:

On applique alors la deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$

$$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_G$$

En projetant la relation vectorielle sur l'axe vertical, Oz dirigé vers le bas :

$$P_z + F_{Az} + f_z = m \cdot a_z \quad \text{et} \quad P - F_A - f = m \cdot a_z \quad \text{d'où} \quad m \cdot g - m_f \cdot g - k \cdot v^n = m \cdot a_z$$

$$\text{On obtient alors l'expression : } m \cdot g - m_f \cdot g - k \cdot v^n = m \frac{dv}{dt}$$

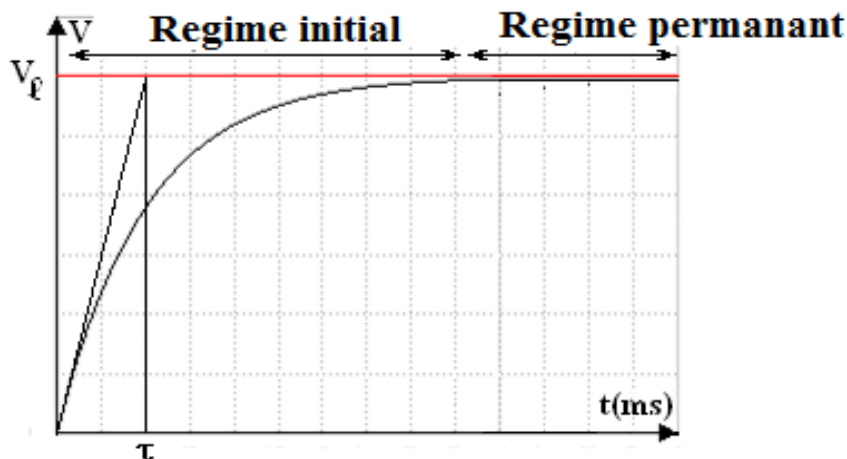
$$g \cdot (m - m_f) - k \cdot v^n = m \frac{dv}{dt} \quad \text{et par suite} \quad \frac{dv}{dt} = g \cdot \frac{m - m_f}{m} - \frac{k}{m} \cdot v^n : \text{Equation différentielle}$$

L'équation différentielle s'écrit sous la forme $\frac{dv}{dt} = B - A \cdot v^n$ avec $A = g \cdot \frac{m - m_f}{m} = g \cdot (1 - \frac{m_f}{m})$ et $B = \frac{k}{m}$

Remarque :

On considère une sphère de masse volumique ρ , de volume V ($m = \rho \cdot V$) en mouvement dans un fluide de masse volumique ρ_0 ($m_f = \rho_0 \cdot V$)

$$A = g \cdot \frac{m - m_f}{m} = g \cdot \left(1 - \frac{m_f}{m}\right) = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$



Au cours d'une chute verticale avec frottement, le mouvement du centre d'inertie G du solide peut se décomposer en deux phases :

- Le régime initial ou transitoire, pendant lequel :
 - La vitesse v_G augmente.
 - La valeur f de la force de frottement fluide augmente
 - L'accélération a_G diminue.
- Le régime asymptotique ou permanent, pendant lequel
 - La vitesse v_G est égale à une vitesse constante v_f .
 - La valeur f de la force de frottement fluide est constante
 - L'accélération a_G est nulle.

$$\frac{dv}{dt} = A - B \cdot v_G^n$$

Le régime initial

$$v_G = 0 \text{ et } \frac{dv}{dt} = A - B \cdot v_G^n = A$$

Le régime permanent

La vitesse $v_G = v_\ell = C^{te}$.

$$\frac{dv}{dt} = A - B \cdot v_\ell^n = 0$$

$$\text{d'où } A = B \cdot v_\ell^n$$

$$\text{et } v_\ell^n = \frac{A}{B} \text{ et } v_\ell = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

Graphiquement

A $t = \tau$, La tangente à la courbe $v(t)$ à $t=0$ et l'asymptote $v = v_\ell$ se croisent donc $V_\ell = a_0 \cdot \tau$

a_0 : le coefficient directeur de la tangente à la courbe $v(t)$ à l'instant $t=0$ alors $a_0 = A$

3. La solution de l'équation différentielle par la méthode D'EULER

La méthode d'Euler est une méthode numérique **itérative** qui permet d'évaluer, à intervalles de temps réguliers, différentes valeurs approchées à partir des conditions initiales.

Il faut pour cela connaître :

- L'équation différentielle du mouvement $\frac{dv}{dt} = A - B \cdot v^n$.
- Les conditions initiales v_0 .
- Le pas de résolution Δt ; $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

On peut déterminer les grandeurs cinétiques (vitesses et accélérations) par :

- ✓ L'équation différentielle à l'instant t_i : $a_i = \frac{dv}{dt} = A - B \cdot v_i^n$ (pour le même point : connaître la vitesse d'un point c'est déterminer son accélération et réciproquement).
- ✓ L'expression de la vitesse : $V_{i+1} = V_i + a_i \Delta t$ (d'un point M_i vers un autre M_{i+1} : Connaître la vitesse et l'accélération d'un point M_i on peut déterminer la vitesse du point suivant M_{i+1}).

$t_0 = 0$	$V_0 = 0$	—————→	$a_0 = A - B \cdot (V_0)^n = A$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$V_1 = V_0 + a_0 \Delta t$	↙—————→	$a_1 = A - B \cdot (V_1)^n$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$V_2 = V_1 + a_1 \Delta t$	↘—————→	$a_2 = A - B \cdot (V_2)^n$

II. La chute libre d'un corps solide

- Le projectile est soumis à l'unique action de son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$
- Les deux vecteurs \vec{P} et \vec{g} ont le même sens et la même direction (les deux vecteurs sont colinéaires)
- La 2^{ème} loi de Newton $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$ d'où $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G$ donc $\vec{a}_G = \vec{g}$
- Les deux vecteurs \vec{a}_G et \vec{g} ont les mêmes caractéristiques

1. Caractéristique du vecteur accélération \vec{a}_G

Origine : Le point G

Direction : - La droite verticale

- La même direction que \vec{g} (même direction que le poids \vec{P})

Sens : - Vers le bas

- Le même sens que \vec{g} (même sens que le poids \vec{P})

Intensité : $a_G = g$

2. Coordonnées de \vec{a}_G vecteur accélération :

$$a_y = -g = C^{te}$$

A l'instant $t = 0$

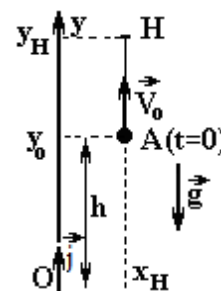
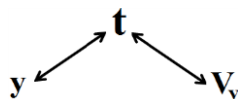
$$y_0 = h \text{ et } V_{0y} = V_0$$

3. Nature du mouvement sur l'axe Oy

$a_y = -g = C^{te}$: Le mouvement est rectiligne uniformément varié sur l'axe Oy

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + V_0 \cdot t + y_0$$

$$V_y = -g \cdot t + V_0$$



4. La flèche :

La flèche est l'altitude H la plus élevée atteinte par le projectile

- Au point H la composante de la vitesse est nulle $V_{Hy}=0$

$Vy = -g \cdot t_H + V_0 = 0$ d'où $t_H = \frac{V_0}{g}$: l'instant d'arrivée au point H et on remplace dans $y(t)$

$$y_H = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + V_0 \cdot \frac{V_0}{g} + y_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_0^2}{g} + y_0$$

y_H : Ordonnée du point H d'où $AH = y_H - y_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_0^2}{g}$

**** Exploiter les équations horaires avec une ou plusieurs informations**

Au point A	<ul style="list-style-type: none">• $y(A)=h$• L'instant de passage par le point A est $t_A = 2 \cdot t_H = \frac{2 \cdot V_0}{g}$• La vitesse de passage par le point A est V_0
-------------------	--

Au point O	<ul style="list-style-type: none">• $y(O) = 0$
-------------------	---