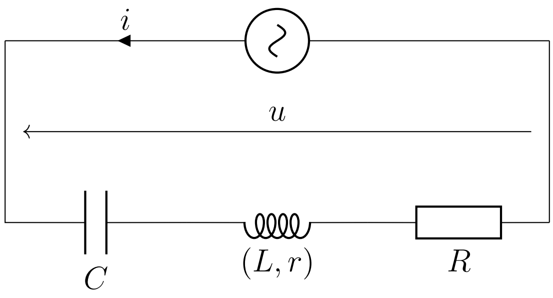
Mohamed El Founani
Lycée Ibn Maja



Les oscillations forcées dans un circuit RLC série :

# Le courant alternatif sinusoïdal :

Un dipôle (RLC) série constitué d'un conducteur ohmique de résistance $R$; une bobine d'inductance $L$ et de résistance interne $r$, et d'un condensateur de capacité $C$, est branché à un générateur qui lui applique une tension sinusoïdal.




## Courant électrique alternatif sinusoïdal :

### La tension du courant électrique alternatif sinusoïdal :

La tension sinusoïdale appliquée s'écrit mathématiquement :

$$u(t) = U_m \cos(2\pi f t + \varphi)$$

Où :

$$\begin{cases} U_m & \text{Tension maximale en (V)} \\ 2\pi f = \omega & \text{Pulsation en (rad/s)} \\ \varphi & \text{Phase à l'origine des dates en (rad)} \end{cases}$$

La tension efficace $U$ à la tension maximale par la relation :

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

### L'intensité du courant électrique alternatif sinusoïdal :

L'intensité sinusoïdale s'écrit mathématiquement :

$$i(t) = I_m \cos\cos(2\pi f t + \varphi)$$

Où :

$$\begin{cases} I_m & \text{Tension maximale en (V)} \\ 2\pi f = \omega & \text{Pulsation en (rad/s)} \\ \varphi & \text{Phase à l'origine des dates en (rad)} \end{cases}$$

La tension efficace $I$ à la tension maximale par la relation :

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

## Déphasage :

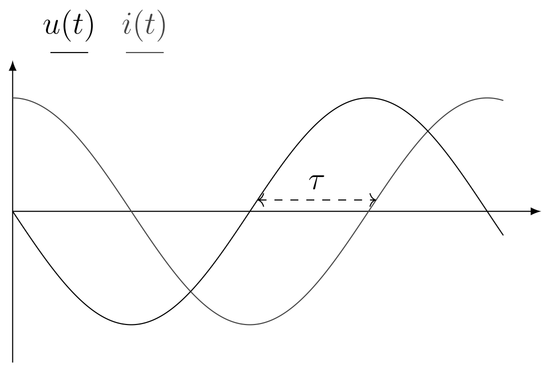
On considère les fonctions suivantes :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$
$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

On appelle le déphasage de $u$ par rapport à $i$, la différence $\Delta\varphi$ des deux signaux :

$$\Delta\varphi = \varphi_{u|i} = \varphi_u - \varphi_i$$

On distingue les cas suivants :
Si $\Delta\varphi > 0$, alors on dit que $u$ est en avance par rapport à $i$.
Si $\Delta\varphi < 0$, alors on dit que $u$ est en retard par rapport à $u$.
Si $\Delta\varphi = 0$, alors on dit que $u$ et $i$ sont en phase.
Si $\Delta\varphi = \pi$, alors on dit que $u$ et $i$ sont en opposition de phase.
Si $\Delta\varphi = \pi/2$, alors on dit que $u$ et $i$ en quadrature de phase.
On considère les deux courbes suivantes :




Supposons qu'à $t = 0$ on a $i = I_m$, donc : $I_m \cos(\varphi_i) = I_m \iff \varphi_i = 0$.
Par suite :

$$\Delta\varphi = \varphi_u$$

On donne :

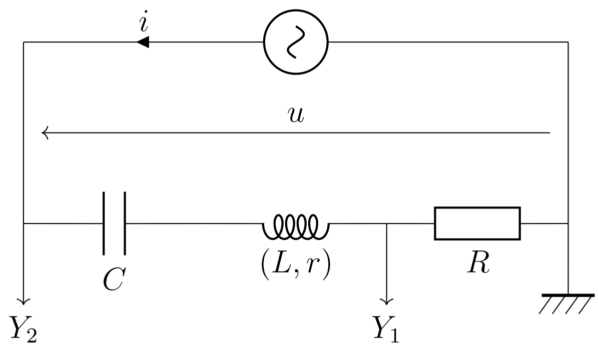
$$|\Delta\varphi| = 2\pi \frac{\tau}{T_0}$$

Où $\tau = \dfrac{\varphi_u}{\omega}$ ou graphiquement comme l'indique la figure $\tau = x.S_h$.

# Étude d'un dipôle (RLC) série en régime sinusoïdal forcé :

## Étude expérimentale :

On réalise le montage suivant :



On visualise sur l'oscilloscope connecté au circuit les courbes l'une du conducteur ohmique et la deuxième du circuit (RLC).
Ses oscillations observés sont appelés les oscillations forcées, car ici c'est le générateur qui impose sur le circuit sa fréquence, donc le circuit est obligé d'osciller, le générateur est appelé excitateur alors le circuit RLC est appelé résonateur.

**Impédance électrique :**

Généralement l'impédance est la résistance d'un circuit au passage d'un courant électrique alternatif sinusoïdale :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}$$

Son unité est l'Ohm ($\Omega$).
**Les impédances de quelques composantes électriques :**
Pour un conducteur ohmique, on a :

$$Z = \frac{u_R}{I} = \frac{RI}{I} = R$$

Pour un condensateur, on a :

$$\begin{aligned} i &= C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} \\ u_c &= \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{C}\int I_m\cos(\omega t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{I_m}{C\omega}\sin(\omega t) \\ &= \frac{I_m}{C\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

On aura :

$$U_m = \frac{I_m}{C\omega} \Longleftrightarrow Z = \frac{1}{C\omega}$$

Pour une bobine, on a :

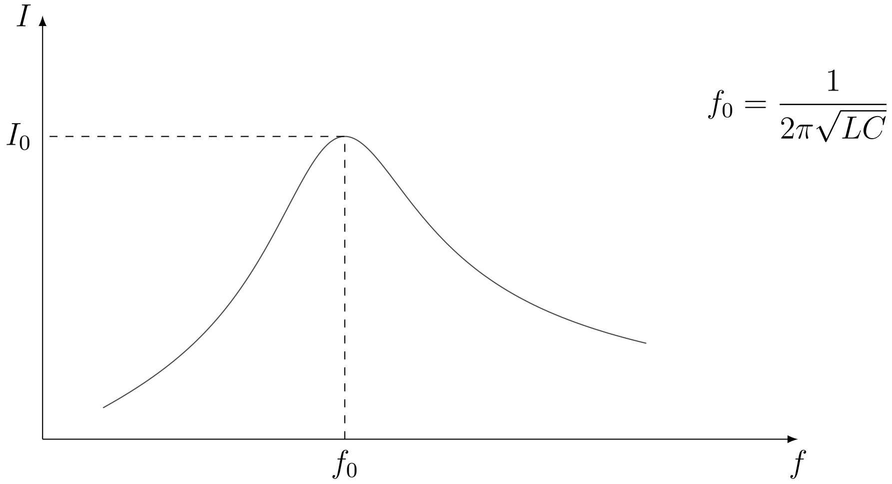
$$\begin{aligned} u_L &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ &= L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_m\cos(\omega t)\right) \\ &= -LI_m\omega\sin(\omega t) \\ &= LI_m\omega\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

On aura :

$$U_m = LI_m\omega \Longleftrightarrow Z = L\omega$$

**Phénomène de résonance :**

Lorsque le système est sensible à la fréquence on observe que certaines grandeurs varient en fonction de cette fréquence :




## Étude théorique :

Aux bornes du circuit (RLC) on a une tension $u$ appliquée.

$$\begin{aligned} u &= U_m \cos(\omega t + \varphi) \\ &= U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Le dipôle est traversé par une intensité :

$$i = I\sqrt{2}\cos(\omega t)$$

Aux bornes du conducteur ohmique on a :

$$\begin{aligned} u_R &= Ri \\ &= RI\sqrt{2}\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Aux bornes du condensateur on a :

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t \\ &= \frac{I\sqrt{2}}{C\omega}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Aux bornes de la bobine :

$$\begin{aligned} u_L &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri \\ &= rI\sqrt{2}\cos(\omega t) - LI\omega\sqrt{2}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

En appliquant la loi d'additivité sur les expressions obtenus, on obtient :

$$\begin{aligned} u &= u_R + u_L + u_c \\ U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) &= (R+r)I\sqrt{2}\cos(\omega t) + I\sqrt{2}\sin(\omega t)\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) \\ U\cos(\omega t + \varphi) &= R_t I\cos(\omega t) + I\sin(\omega t)\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) \end{aligned}$$

Si $\omega t = 0$ on aura :

$$U\cos(\varphi) = R_t I \tag{1}$$

Si $\omega t = \pi/2$ on aura :

$$U\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = I\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)$$

En utilisant le fait que : $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$, on obtient :

$$-U\sin(\varphi) = I\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) \Longleftrightarrow U\sin(\varphi) = I\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \tag{2}$$

En divisant (2) par rapport à (1) on obtient :

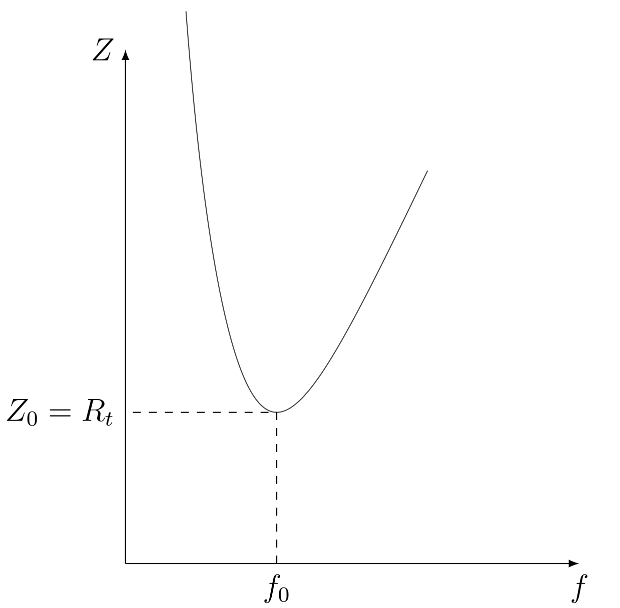
$$\begin{aligned}
\frac{U\sin\varphi}{U\cos\varphi} &= \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \\
\tan\varphi &= \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R_t} \\
\varphi &= \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R_t}\right)
\end{aligned}$$

En ajoutant $(1)^2$ à $(2)^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
U^2\sin^2(\varphi) + U^2\cos^2(\varphi) &= I^2\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + R_t^2 I^2 \\
U &= \sqrt{R_t^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} I \\
Z &= \sqrt{R_t^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}
\end{aligned}$$

Donc la tracé de la courbe de l'impédance en fonction de la fréquence, on rappelle que $\omega \propto f$ :
Vous pouvez d'ailleurs déduire la relation suivante :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R_t^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$



**À retenir :**

à la résonance, les conditions suivantes sont vérifiés :
. Les impédances du condensateur et la bobine sont égaux :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

. À partir de cette relation on peut déduire que :

$$\begin{aligned} L\omega &= \frac{1}{C\omega} \\ \omega^2 &= \frac{1}{LC} \\ 4\pi^2 f^2 &= \frac{1}{LC} \\ f &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \end{aligned}$$

Donc la fréquence à la résonance est celle du circuit (RLC) lorsque les oscillations sont libres.
.On peut déduire aussi que :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R_t}\right) = 0$$

C'est-à-dire $i$ et $u$ sont en phase à la résonance.
. $I$ est maximale sa valeur est :

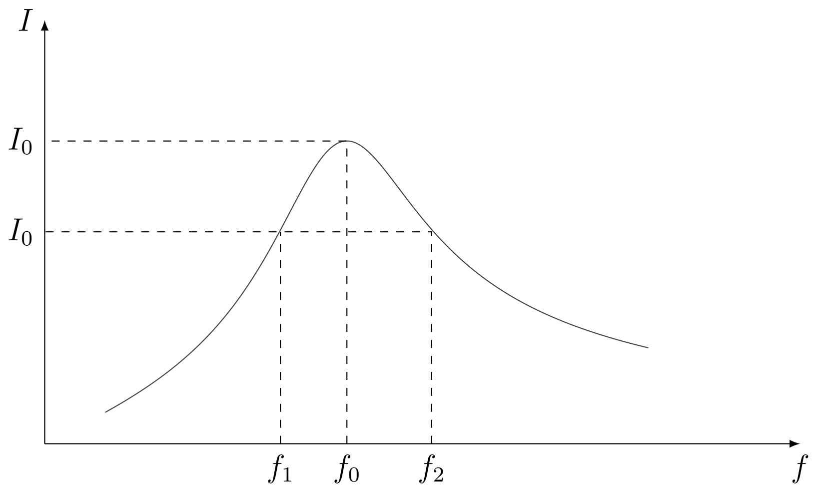
$$I_0 = \frac{U}{R_t}$$

. $Z$ est minimale sa valeur est :

$$Z_0 = R_t$$

## La bande passante, le facteur de qualité :

**La bande passante** du circuit (RLC) est l'intervalle $[f_1; f_2]$ vérifiant : $I(f) \geq \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$.




La largeur de la bande passante, dite à trois décibels (-3dB) est : $\Delta f = f_2 - f_1$.
Le facteur de qualité d'un circuit (RLC) est donné par la relation :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{R_t}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

C'est un facteur sans dimension caractérisant l'acuité de la résonance.

# La puissance dans le régime sinusoïdal :

## Puissance instantanée :

On sait que :

$$\mathscr{P} = ui$$

Avec :

$$\begin{cases} u &= U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \\ i &= I\sqrt{2}\cos(\omega t) \end{cases}$$

Respectivement, la tension instantanée appliquée par le générateur, et l'intensité instantanée qui parcourt le circuit.
On rappelle que :

$$\cos q \cos p = \frac{1}{2}\left[\cos(q+p) + \cos(q-p)\right]$$

$$\begin{aligned} \mathscr{P} &= ui \\ &= 2UI\frac{1}{2}\left(\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi\right) \\ &= UI\left(\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi\right) \end{aligned}$$

Cette puissance ne permet pas d'évaluer le bilan énergétique du circuit, donc on définit la puissance moyenne, appelée aussi active.

## La puissance moyenne :

Au cours d'une période $T$ on a :

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &= \int_0^T \mathscr{P}\mathrm{d}t \\ &= UI\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi)\mathrm{d}t + \int_0^T \cos\varphi\mathrm{d}t \\ &= UIT\cos\varphi \end{aligned}$$

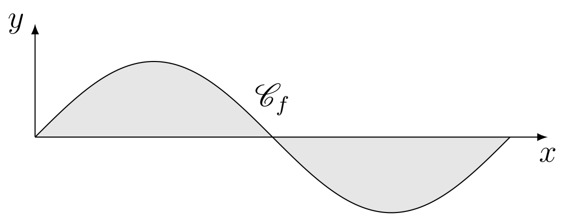
D'où :

$$\mathscr{P} = UI\cos\varphi$$

**Complément mathématique :** Soit $f$ une fonction $T$-périodique, et $F$ sa primitive :

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Géométriquement on peut la démontrer comme suit :



Sinon :

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t &= \int_a^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{a+T} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{a+T} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\mathrm{d}t \\ &= F(a+T) - F(0) - F(a) + F(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$F$ est $T$-périodique aussi.
Dans notre exemple l'intégrale :

$$\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi)\mathrm{d}t = 0$$

En tout cas, on sait maintenant que :

$$\mathscr{P} = UI\cos\varphi$$

Avec $\cos\varphi$ est le facteur de puissance.
On peut déduire à partir : $\mathscr{P} = R_t I^2$ que :

$$\cos\varphi = \frac{R_t}{Z}$$