Mohamed El Founani
Lycée Ibn Maja

Le dipôle RL :

La bobine :

La bobine est un composant électrique constitué par l'enroulement d'un fil conducteur couvert par un vernis isolant. Son symbole dans les circuits électriques est celui ci-contre.

L'auto-induction :

L'année dernière dans le cours du magnétisme, nous avons vu que chaque fil conducteur parcouru par un courant électrique, crée un champ magnétique.
Lorsque la bobine est traversée par un courant électrique d'intensité variable est soumise aux variations de son propre champ magnétique, et donc on obtient le phénomène d'auto-induction, autrement dit on a l'apparition d'une force contre électromotrice. La bobine est donc auto-inductive.

L'inductance L d'une bobine :

Puisque la bobine joue le rôle d'un récepteur, alors la tension entre ses bornes s'écrit sous forme :

$$u = e + ri$$

Où e est la force contre électromotrice (V), r est sa résistance interne (Ω) et i l'intensité du courant (A).
Suivant un loi que vous verrez dans vos études supérieures on peut exprimer e en fonction de L le coefficient d'auto-induction, appelée l'inductance, et i, la loi est appelée *Loi de Lenz-Faraday* :

$$e = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Par suite :

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri$$

L'unité de l'inductance est le Henry, de symbole H.
Pour une bobine idéale, la résistance interne est nulle, c'est-à-dire $r = 0$, d'où :

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

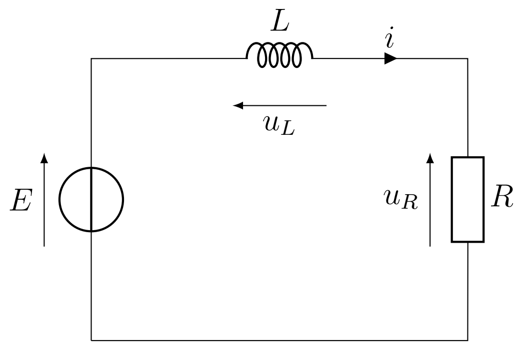
Le dipôle RL :

Le dipôle RL est l'association en série d'une bobine idéale L et d'une résistance R.
On se propose à étudier la réponse du dipôle à un échelon de tension E.

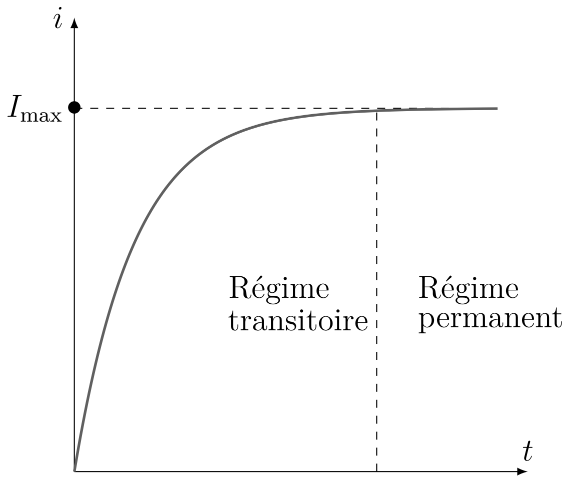
L'établissement du courant:

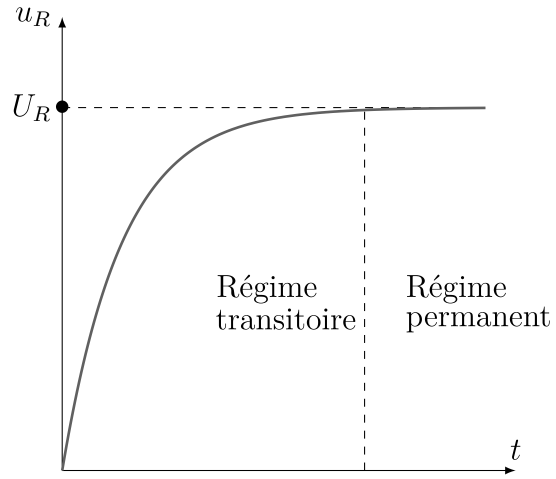
Étude expérimentale :

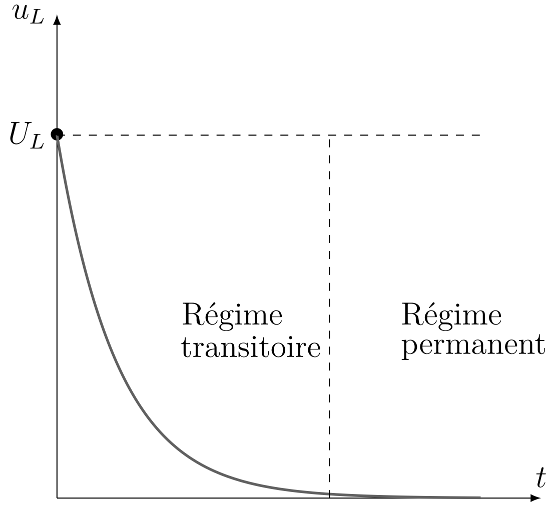
Soit le circuit suivant :



Les formes des courbes des tensions u_L au bornes de la bobine et u_R au bornes de la résistance, obtenues sur un oscilloscope mettent en évidence deux domaines :
Régime transitoire : Le courant i et u_R s'établissent de 0 jusqu'à une valeur constante, alors que u_L d'une valeur maximale jusqu'à 0.
Régime permanent : Lorsque $t \to \infty$ on a u_L, u_R et i tendent respectivement vers $0, U_{R_{\max}}$ et $I_{\max}$.







Étude théorique :

La bobine est supposée idéale ($r = 0$) :
On a d'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_L + u_R = E$$
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E$$

C'est une équation différentielle de solution :

$$i = A\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

En la remplaçant dans l'expression qu'on a obtenu :

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\right) + RA\left(1 - e^{-\alpha t}\right) = E$$
$$LA\alpha e^{-\alpha t} + RA - RAe^{-\alpha t} - E = 0$$
$$Ae^{-\alpha t}\left(L\alpha - R\right) + \left(RA - E\right) = 0$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} L\alpha - R & = 0 \\ RA - E & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha & = \dfrac{R}{L} \\ A & = \dfrac{E}{R} \end{cases}$$

Par suite :

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

où $\tau = \dfrac{R}{L}$

La constante de temps τ :

Afin d'avoir l'homogénéité dans l'expression de i, il faut que τ soit temporelle. On vérifie ceci en effectuant une analyse dimensionnelle :

$$[\tau] = \left[\frac{L}{R}\right]$$
$$= \frac{[L]}{[R]}$$

On a :

$$[L] = \frac{[U][T]}{[I]}$$

Et :

$$[R] = \frac{[U]}{[I]}$$

Donc :

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]}$$
$$= \frac{[U][T]}{[I]}.\frac{[I]}{[U]}$$
$$= [T]$$

Par suite τ a une dimension de temps.

L'expression de la tension u_L :

On sait que :

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_L &= L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right) \\ &= L.\frac{E}{R}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= Ee^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Donc :

$$u_L = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

L'expression de la tension u_R :

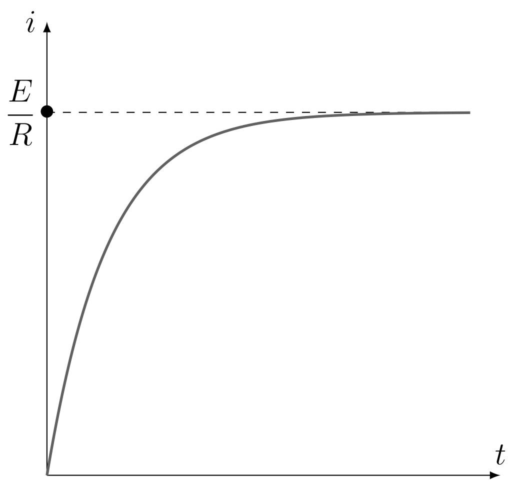
On sait d'après la loi d'Ohm que :

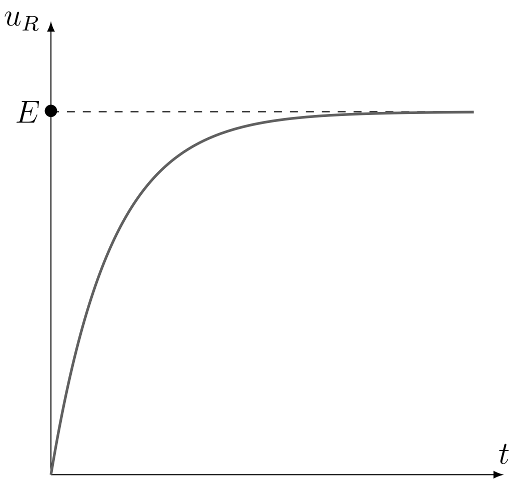
$$u_R = R.i$$

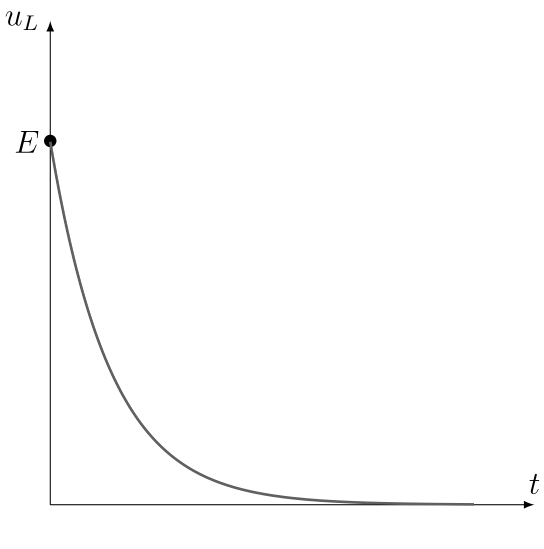
Donc :

$$u_R = R.\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Les graphes :



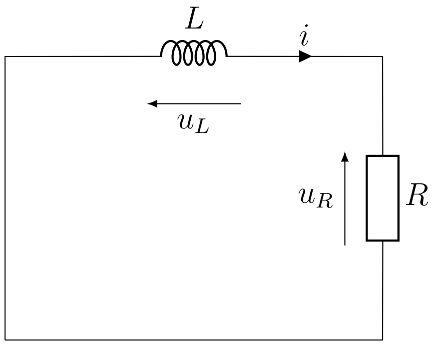




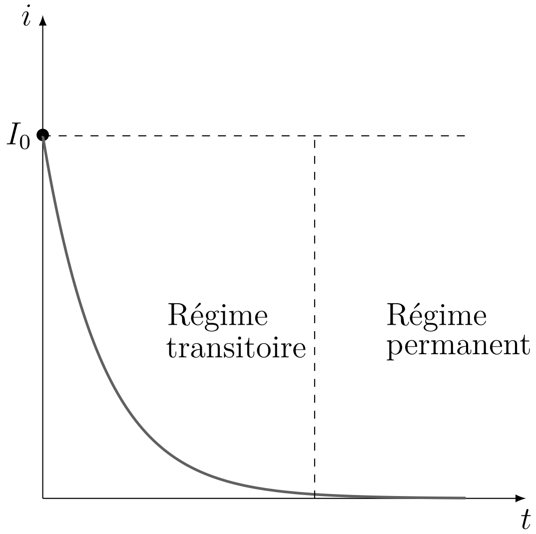
Rupture du courant :

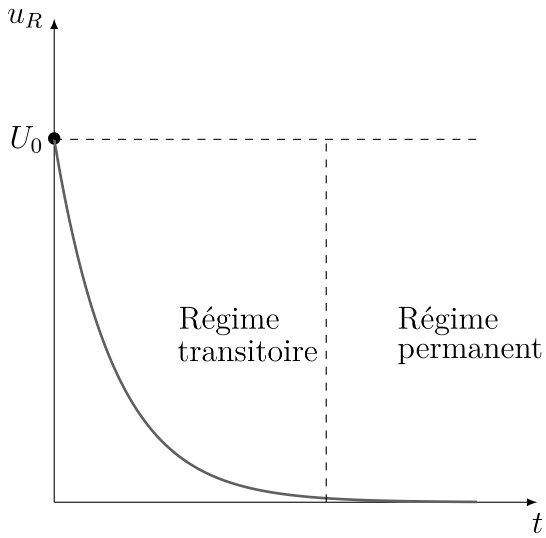
Étude expérimentale :

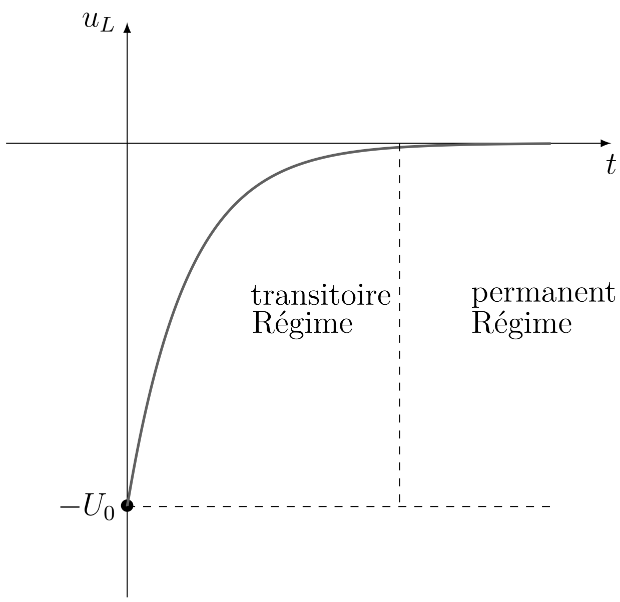
Soit le circuit suivant :



Les formes des courbes des tensions u_L aux bornes de la bobine et u_R aux bornes de la résistances obtenues sur l'oscilloscope, mettent en évidence deux domaines :
Régime transitoire : le courant i qui est proportionnel à la tension u_R s'annule de $i = I$ jusqu'à son annulation à 0.
Régime permanent : tous les courbes tend vers 0, lorsque $t \to \infty$.







Étude théorique :

La bobine est supposée idéale, c'est-à-dire la résistance interne est nulle.
D'après la loi d'additivité des tensions, on a :

$$u_L + u_R = 0$$
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0$$

C'est une équation différentielle de solution :

$$i = Ae^{-\alpha t} + B$$

En la remplaçant dans l'expression obtenu :

$$\begin{aligned} L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ae^{-\alpha t} + B\right) + Ae^{-\alpha t} + B = 0 \\ -LA\alpha e^{-\alpha t} + RAe^{-\alpha t} + RB = 0 \\ Ae^{-\alpha t}\left(R - L\alpha\right) + RB = 0 \end{aligned}$$

Or $Ae^{-\alpha t} \neq 0$ alors :

$$\begin{cases} R - L\alpha & = 0 \\ RB & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha & = \dfrac{R}{L} \\ B & = 0 \end{cases}$$

Pour A, on peut la déterminer à partir des conditions initiales $t = 0$:
À cet instant $i = \dfrac{E}{R}$, c'est-à-dire :

$$\frac{E}{R} = A$$

Finalement :

$$i = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Où $\tau = \dfrac{L}{R}$ est la constante du temps en (s).

La tension u_L :
On a :

$$\begin{aligned} u_L &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ u_L &= L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ &= L \times \left(-\frac{E}{R}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ &= -Ee^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Par suite :

$$u_L = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

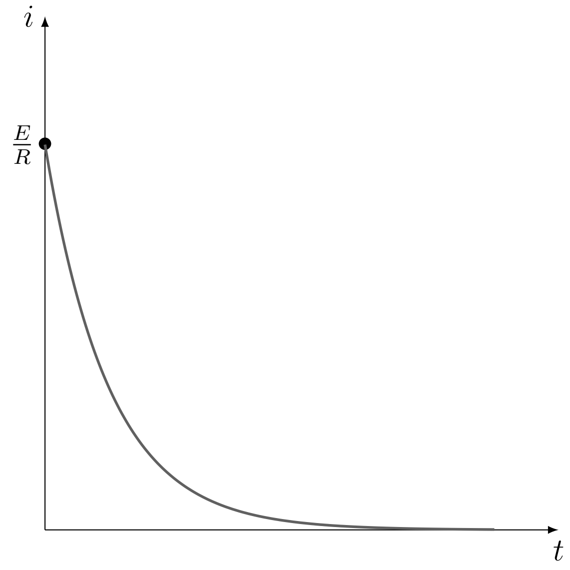
La tension u_R :
On a :

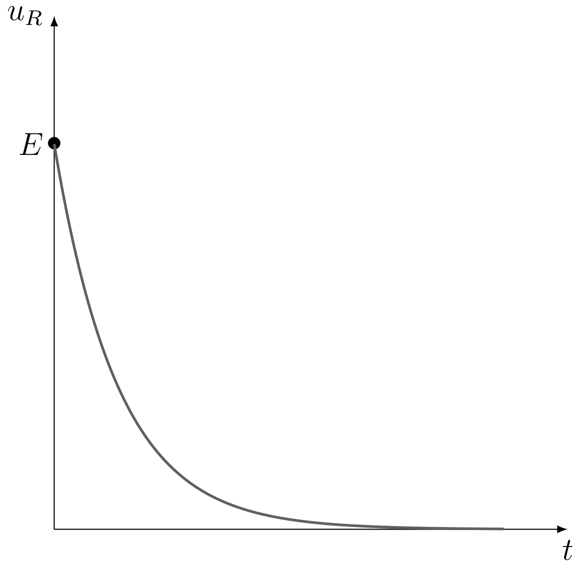
$$\begin{aligned} u_R &= Ri \\ &= R\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= Ee^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

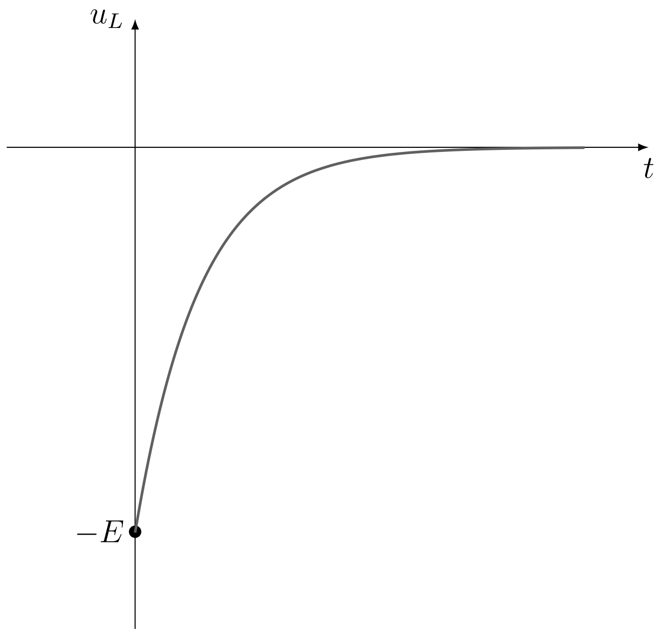
Par suite :

$$u_R = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Les graphes :





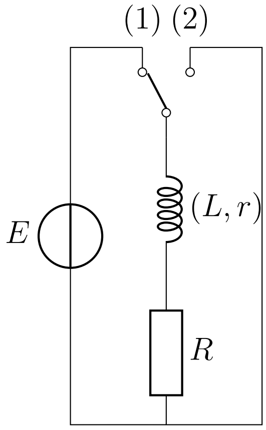


Remarque : Lorsque la bobine a une résistance interne r non négligeable, on suit les mêmes étapes lors de l'étude théorique du circuit, mais avec une résistance totale $R_T = R + r$.
Et donc la constante du temps sera exprimé par la relation suivante :

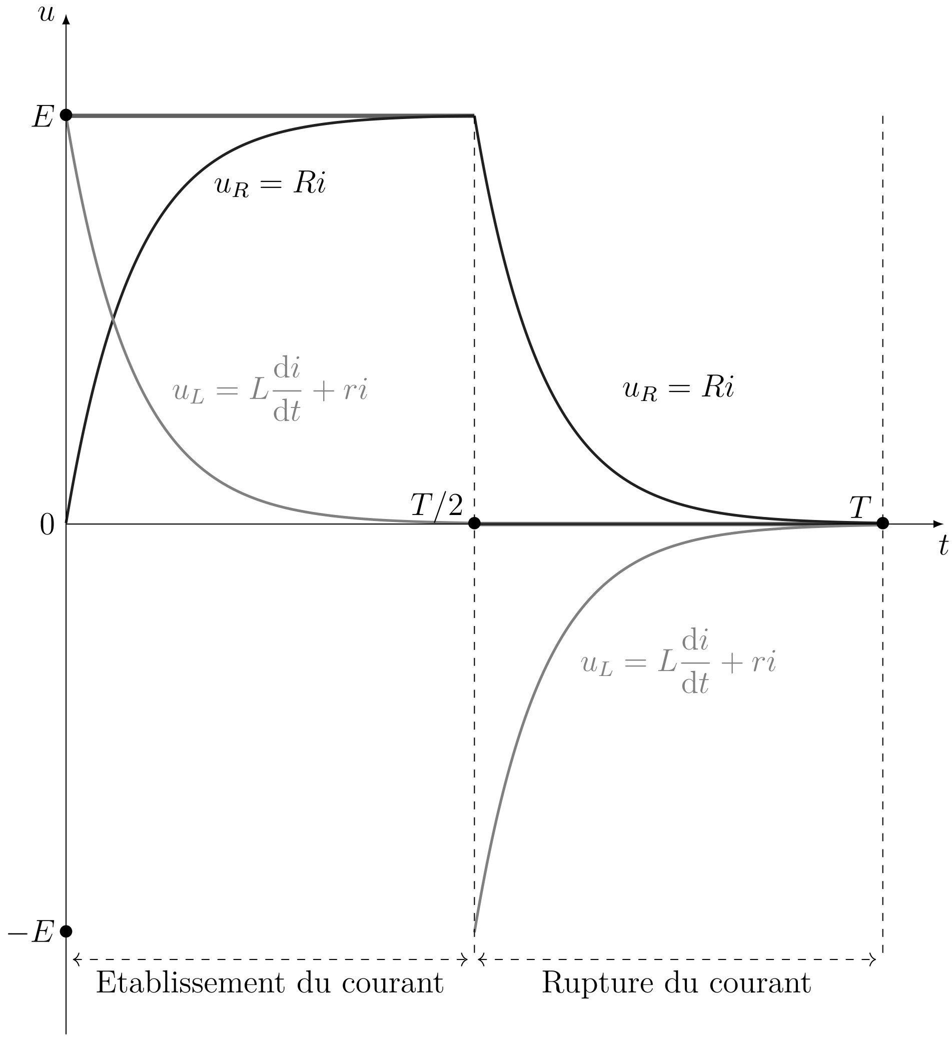
$$\tau = \frac{L}{R_T} = \frac{L}{R + r}$$

Charge et décharge périodique :

On considère le circuit suivant :

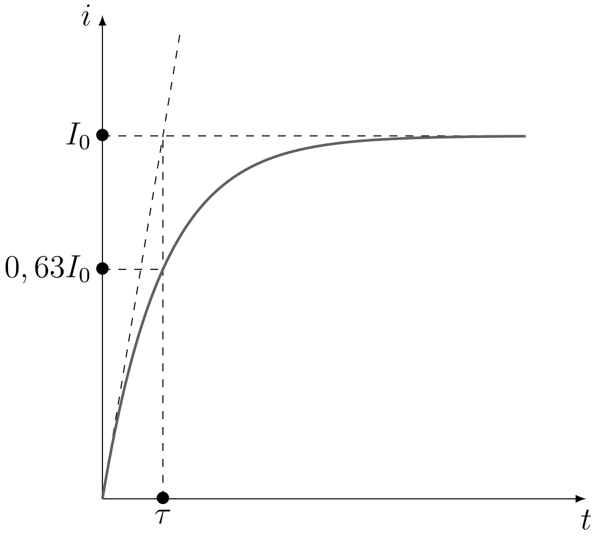


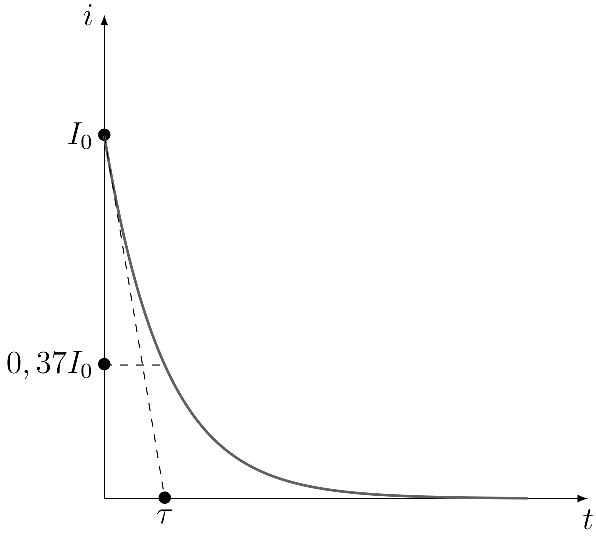
À chaque période $T/2$ on met l'interrupteur en une position, tel que en (1) on parle de l'établissement du courant, alors en (2) de la rupture de ce dernier.
On peut montrer que la durée de l'établissement ou de l'annulation du courant dans un circuit RL est environ 5τ.
On obtient sur un oscilloscope les oscillogrammes des tensions u_L et u_R :



Détermination de τ :

On peut déterminer la constante de temps, graphiquement, en utilisant l'une des méthodes suivantes :
. **La méthode de la tangente.**
. **La méthode de recherche de l'abscisse correspondante** à $0,63I_0$ pour l'établissement du courant, et l'ordonnée $0,37I_0$ pour l'annulation du courant.
C'est-à-dire on utilise les mêmes méthodes citées dans le cours *dipôle RC*.





Aspect énergétique :

Une bobine traversé par un courant acquiert de l'énergie sous forme magnétique, qu'elle restitue dès l'ouverture du circuit.

L'expression de l'énergie emmagasinée par la bobine :

On sait que la puissance aux bornes de la bobine idéale :

$$\begin{aligned}
\mathscr{P} &= u.i \\
&= \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \\
\mathscr{P}\mathrm{d}t &= \mathrm{d}\mathscr{E} \\
u.i\mathrm{d}t &= \mathrm{d}\mathscr{E} \\
\mathrm{d}\mathscr{E} &= u\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
&= u\mathrm{d}q \\
&= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}q
\end{aligned}$$

Et on sait que : $i\mathrm{d}t = \mathrm{d}q$, donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathscr{E} &= L.i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
\int \mathrm{d}\mathscr{E} &= \int L.i\mathrm{d}i \\
\mathscr{E} &= L\frac{i^2}{2}
\end{aligned}$$

Donc, l'énergie emmagasinée par la bobine vaut :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}L.i^2$$