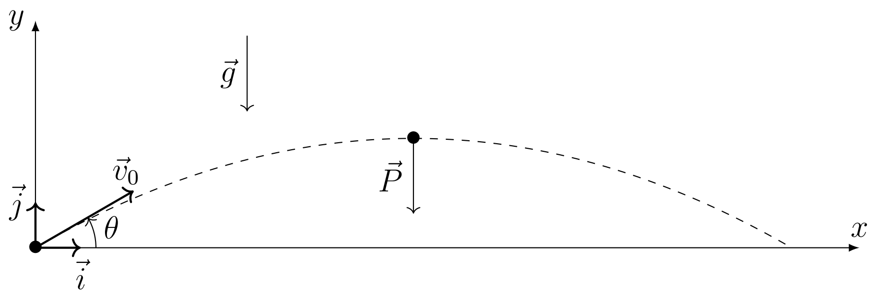
Mohamed El Founani
Lycée Ibn Maja

Les mouvements plans :

Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme :

On lance un projectile de masse m d'un point O à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ qui fait une angle α avec l'horizontale. On considère le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ confondu avec le plan où le projectile est en mouvement, il est supposé galiléen.
Les conditions initiales : à $t = 0$ on a : $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$.



Les équations horaires du mouvement et vitesse :

Les composantes de $\vec{v}_0$ sont :

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} &= v_0 \cos\theta \\ v_{0y} &= v_0 \sin\theta \end{cases}$$

Le système étudié est {Le projectile}.
Le bilan des forces : Le projectile est soumis à son poids uniquement $\vec{P}$.
D'après la deuxième loi de Newton on a :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{P} &= m\vec{a} \\ m\vec{g} &= m\vec{a} \\ \vec{g} &= \vec{a} \end{aligned}$$

Projetons cette relation sur les axes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_x &= 0 \\ a_y &= -g \end{cases} &\iff \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -g \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} v_x &= v_{0x} \\ v_y &= -gt + v_{0y} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= v_0 \cos(\theta).t + x_0 \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta).t + y_0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= v_0 t \cos\theta \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases} \end{aligned}$$

Donc **les équations horaires de vitesse** sont données par :

$$\begin{cases} v_x &= v_0 \cos\theta \\ v_y &= -gt + v_0 \sin\theta \end{cases}$$

Et ceux **du mouvement** sont :

$$\begin{cases} x &= v_0 t \cos\theta \\ y &= -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases}$$

Étude de la trajectoire :

L'équation de la trajectoire est donné par :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + x \tan\theta$$

Elle est obtenue en posant $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta}$. C'est-à-dire en éliminant t entre x et y.

Les caractéristiques du mouvement :

La flèche :

C'est l'altitude maximale $h_{\max}$ atteinte par le projectile.
Soit S le point correspondant sur la trajectoire et situé dans le sommet de la trajectoire.
On a $v_{y_S} = 0$, c'est-à-dire :

$$-gt + v_0 \sin\theta = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

En remplaçant dans les expressions de x et y, on trouve :

$$x_S = v_0 \cos\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{2g}$$

On utilise $\dfrac{\sin(2\theta)}{2} = \sin\theta\cos\theta$.
Et on a :

$$\begin{aligned} y_S &= -\frac{g}{2} \times \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + v_0 \sin\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g} \\ &= -\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \\ &= h_{\max} \end{aligned}$$

La portée horizontale :

C'est l'abscisse x_P du point P de la trajectoire d'ordonnée nulle, c'est-à-dire situé sur l'axe (Ox), autrement dit $y_S = 0$, on obtient :

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x_P^2 + x_P \tan\theta = 0$$

C'est une équation qui donne deux solutions, dans notre cas, la première solution est x_0 qui correspond au point du lancement O.
Remarque : Si x_1 et x_2 sont les racines d'un polynôme $ax + bx + c$, alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Utilisons cette remarque et trouvons x_P :

$$\begin{aligned} x_P + x_0 &= \frac{2v_0^2 \cos^2\theta \tan\theta}{g} \\ x_P &= \frac{2v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \end{aligned}$$

La distance d **la portée horizontale** est :

$$d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

La vitesse du centre d'inertie du projectile :

La vitesse du centre d'inertie à un instant t, s'écrit :

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

La norme est :

$$v = \sqrt{v_x r + v_y^2}$$

Avec :

$$v_x = v_0 \cos\theta \qquad \text{et} \qquad v_y = -gt + v_0 \sin\theta$$

Au point S le sommet on a $v_y = 0$ donc :

$$v_S = \sqrt{v_x^2} = v_0 \cos\theta$$

Remarque : La flèche est maximale si et seulement si : $\sin(2\theta) = 1 \Leftrightarrow \theta = \pi/4$.

Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$:

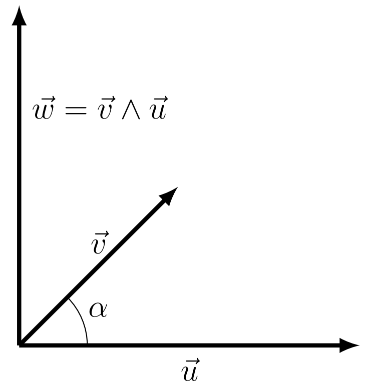
Complément mathématique :

Le produit vectoriel :

Le produit vectoriel $\vec{w}$ des deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$, s'écrit sous forme $\vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{u}$.
Sa direction est perpendiculaire au plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Son sens est déterminé à partir d'un trièdre direct ou par l'utilisation des trois doigts de la main droite.
Sa norme est déterminé en appliquant :

$$w = v.u.\sin\alpha$$

Où $\alpha = \left(\overline{\vec{v}\ ;\ \vec{u}}\right)$



Force de Lorentz :

Le champ magnétique $\vec{B}$:

Le champ magnétique $\vec{B}$ est une grandeur vectoriel, vu l'année dernière, $\vec{B}$ est caractérisée par, sa direction, son sens et sa norme mesurée en Tesla (T).
Cette année en verra que la présence du champ magnétique traduit l'existence d'une force agissante sur sur les particules chargées, de charge q et se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel donnée.

La relation de Lorentz :

À partir de la relation de Laplace (vue l'année dernière) qui s'applique aux conducteurs (une barre de fer par exemple), on peut démontrer la force qui s'applique aux électrons qui traversent ce conducteur :
La force de Laplace est donnée par :

$$\vec{F} = I\vec{l} \wedge \vec{B}$$

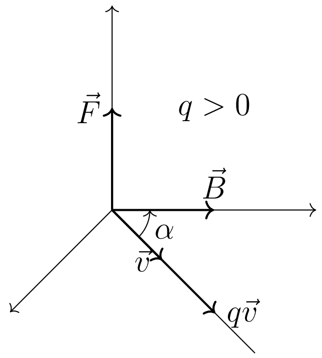
Et on a : $q = It$ et $\vec{l} = \vec{v}t$.
D'où :

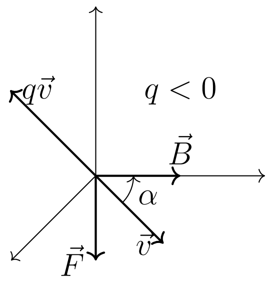
$$q\vec{v} = I\vec{l}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= I\vec{l} \wedge \vec{B} \\ &= q\vec{v} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

Cette relation est celle de Lorentz, qui décrit la force appliquée sur les particules chargés dans un champ magnétique, animées en une vitesse $\vec{v}$.
Remarque :
. Si la vitesse $\vec{v}$ a la même direction de $\vec{B}$, la particule ne subit pas de force car $(\widehat{\vec{v};\vec{B}}) = 0$ c'est-à-dire $\sin 0 = 0$.
. La force est maximale lorsque $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, car $(\widehat{\vec{v};\vec{B}}) = \pi/2$.
. Les caractéristiques de la force :
  Direction : $\vec{F}$ est orthogonale à la fois à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$.
  Sens : Le trièdre $(q\vec{v};\vec{B};\vec{F})$ est direct.
  Intensité : $F = |q\sin\alpha|vB$.





Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique :

Dans tous ce qui suit, on considéreras que le poids de la particule est négligeable devant la force magnétique.

Cas général : $\vec{B}$ quelconque

Dans un champ magnétique, le mouvement d'une particule chargé est uniforme. Si la particule est initialement au repos, elle reste au repos. La force magnétique ne modifie que la direction du vecteur vitesse de la particule.

Cas particulier

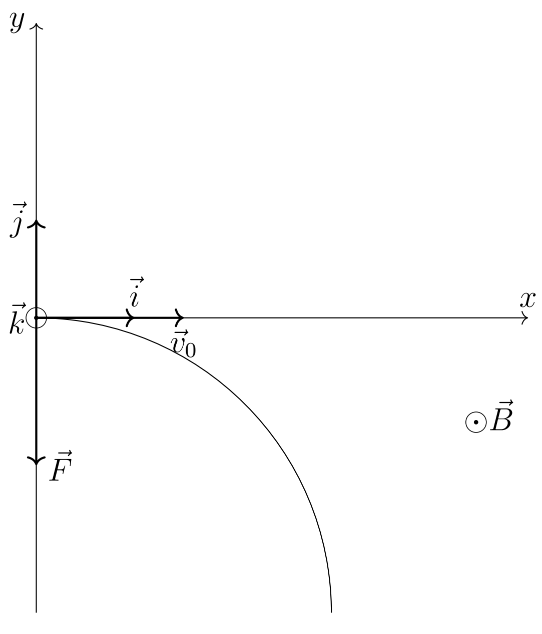
On considère le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique, qui répond aux conditions suivantes :

. $\vec{B}$ est uniforme.

. Il est orthogonal au vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ de la particule.

Pour décrire le mouvement de la particule dans le référentiel supposé galiléen, on choisit le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que : $\vec{B} = B\vec{k}$ et $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$.
La particule pénètre dans le champ en O à la date $t = 0$.
Dans ce repère, la particule est caractérisée par ces vecteurs position, vitesse et accélération.

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \quad ; \quad \vec{v}\begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{a}\begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases}$$



Le mouvement de la particule dans le champ $\vec{B}$ est uniforme et circulaire, qui se fait dans un plan.
Démonstration :
Le système étudié : { La particule }
Les forces appliquées sur le systèmes : $\vec{F}$ La force magnétique.
Dans un repère terrestre considérée galiléen, on applique la deuxième loi de Newton :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Multiplions les membres de cette équation scalairement par $\vec{k}$:

$$\vec{a}.\vec{k} = \left(\frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}\right).\vec{k}$$

Or, $\vec{B}$ est colinéaire à $\vec{k}$, donc :

$$\vec{a}.\vec{k} = 0$$

Par suite, on déduit les équations suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{z} &= 0 \\ \dot{z} &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

La coordonnée z étant toujours nulle, le mouvement de la particule a lieu dans le plan (xOy) orthogonal à $\vec{B}$.
La particule a une trajectoire curviligne, utilisons le repère de Frenet pour exprimer l'accélération :

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

Et on sait que :

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Autrement :

$$\vec{a} = 0.\vec{u} + \frac{|q|}{m}vB.\vec{n}$$

D'où, on peut déduire le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \frac{v^2}{\rho} &= \frac{|q|}{m}vB \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} v = v_0 &= \mathrm{C^{te}} \\ \rho = \frac{mv_0}{|q|B} &= \mathrm{C^{te}} \end{cases}$$

Ce qui montre que le mouvement est uniforme, et circulaire de rayon :

$$R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

Remarque : La période T :
On sait que :

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{\frac{v_0}{R}} \\ &= \frac{2\pi R}{v_0} \\ T &= \frac{2\pi m}{|q|B} \end{aligned}$$

La période ne dépend pas de v_0.

Aspect énergétique :

La puissance :

La puissance $\mathscr{P}$ est le produit scalaire de la vitesse et la force. Or la force magnétique est perpendiculaire à $\vec{v}$, alors :

$$\mathscr{P} = \vec{F}.\vec{v} = F.v.\cos(\pi/2) = 0$$

Par suite on peut déduire que la force magnétique ne travaille pas.

L'énergie cinétique :

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}mv_0^2$$

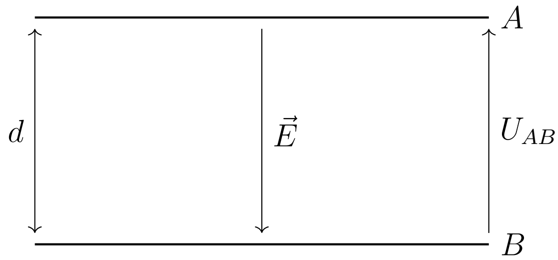
Le champ magnétique ne varie pas l'énergie cinétique de la particule chargée, donc :

$$\mathscr{E}_c = \mathrm{C^{te}}$$

Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$:

Le champ électrique $\vec{E}$:

Un champ électrique, est un champ crée par des particules chargées, souvent fixes dans le référentiel d'étude, $\vec{E}$ est caractérisé par : Sa direction, son sens et sa norme mesurée en V/m ou N/C. On distingue deux cas : Si la charge est positive le champ est centrifuge, si elle négative alors le champ est centripète.
Cette année on s'intéressera au champs crées par les plaques appliquées entre eux une tension U et séparés par une distance d.



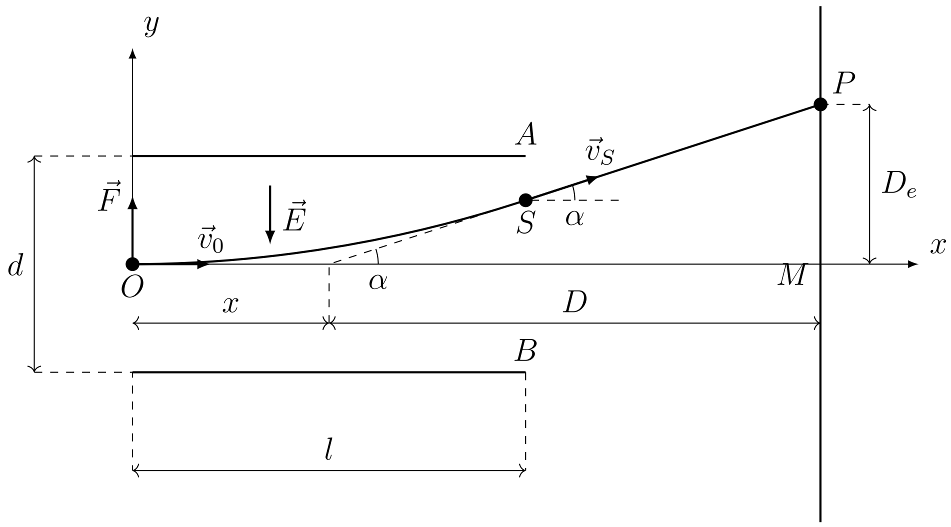
Les caractéristiques de $\vec{E}$:
Direction : Perpendiculaire aux plaques.
Sens : De la plaque ayant le grand potentiel vers celle ayant le potentiel petit.
Intensité : $E = \dfrac{U}{d}$

La force électrique :

Toute charge q placée dans une région de l'espace dominée par un champ électrique $\vec{E}$ est soumise à une force électrique : $\vec{F} = q\vec{E}$ et d'intensité : $F = |q|E$.
Si $q > 0$, alors $\vec{F}$ a le même sens de $\vec{E}$.
Si $q < 0$, alors $\vec{F}$ a le sens inverse de $\vec{E}$.

Déviation d'une charge :

En suivant les mêmes étapes de l'étude précédente, on va déterminer le vecteur position, vitesse et accélération.
Lorsque un électron pénètre dans un champ électrique $\vec{E}$, la force $\vec{F_e}$ est appliquée.



Le système étudié : { L'électron }
Les forces appliquées sur le système : $\vec{F}$ La force électrique.
Dans un repère considérée galiléen, on applique la 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Par projection on trouve :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x & = 0 \\ a_y & = \dfrac{|q|}{m}E \end{cases} \overset{\int \mathrm{dt}}{\Rightarrow} \vec{v}\begin{cases} v_x & = v_0 \\ v_y & = \dfrac{|q|}{m}Et \end{cases} \overset{\int \mathrm{dt}}{\Rightarrow} \overrightarrow{OM}\begin{cases} x & = v_0 t \\ y & = \dfrac{|q|}{2m}Et^2 \end{cases}$$

Le mouvement de la particule est rectiligne uniforme selon l'axe (Ox), alors qu'il est rectiligne uniformément varié selon l'axe (Oy).
L'équation du trajectoire : Par élimination du temps entre x et y on trouve :

$$y = \frac{|q|E}{2mv_0^2}x^2$$

La trajectoire est donc une parabole

Les caractéristiques du mouvement :

La sortie :

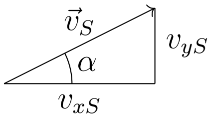
C'est le point S indiquée sur la figure. Il correspond au point où l'électron quitte le champ $\vec{E}$.
On $x_S = l$, en la remplaçant dans l'équation du trajectoire on obtient : $y_S = \dfrac{|q|El^2}{2mv_0^2}$.

$$S\begin{cases} x_S & = l \\ y_S & = \dfrac{|q|El^2}{2mv_0^2} \end{cases}$$

La vitesse à la sortie :

On sait qu'à S on a $t_S = l/v_0$, c'est la période nécessaire pour que la particule atteint S. D'où :

$$\vec{v}_S \begin{cases} v_{xS} & = v_0 \\ v_{yS} & = \dfrac{|q|El}{mv_0} \end{cases}$$



On a :

$$\tan\alpha = \frac{v_{yS}}{v_{xS}} = \frac{|q|El}{mv_0^2}$$

La déviation électrique :

Après sa sortie, la particule n'est plus soumise à la force électrique, elle continue donc son mouvement jusqu'à son arrivée à un point P, on remarque une distance importante D_e, c'est la distance qui sépare P du point d'impact M, si $\vec{E}$ était absent.
On a :

$$\tan\alpha = \frac{D_e}{D} = \frac{y_S}{x} \Longleftrightarrow D_e = \frac{y_S D}{x}$$

Calculons x :
On sait que : $\tan\alpha = \dfrac{|q|El}{mv_0^2}$ et on sait que $x = \dfrac{y_S}{\tan\alpha}$, d'où :

$$\begin{aligned} x &= \frac{|q|l^2E}{2mv_0^2} \times \frac{mv_0^2}{|q|El} \\ &= \frac{l}{2} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{|q|El}{2mv_0^2}\frac{2}{l}D \\ &= \frac{|q|U}{dmv_0^2}D \end{aligned}$$

D'où :

$$D_e = \frac{|q|D}{dmv_0^2}U$$