

**EXERCICE 1**

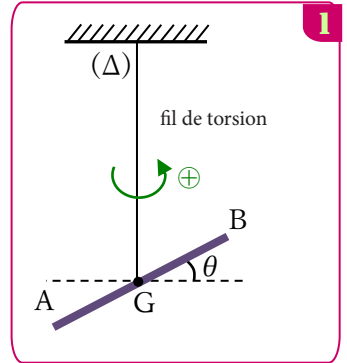
**20 min**

Le pendule de torsion permet de déterminer quelques grandeurs physique relatives à la matière comme la constante de torsion des matières solides déformables et le moment d'inertie des systèmes mécaniques oscillants .

On étudie de manière simplifiée comment déterminer la constante de torsion d'un fil métallique et quelques grandeurs cinématiques et dynamiques en exploitant les diagrammes d'énergie d'un pendule de torsion .

Un pendule de torsion est constitué d'un fil métallique vertical de constante de torsion  $C$  et d'une tige homogène  $AB$  , son moment d'inertie  $J_{\Delta} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$  par rapport à l'axe vertical  $(\Delta)$  confondu avec le fil et passant par  $G$  le centre d'inertie de la tige .

On fait tourner la tige  $AB$  horizontalement dans le sens positif autour de l'axe  $(\Delta)$  de l'angle  $\theta_m = 0,4 \text{ rad}$  par rapport à sa position d'équilibre , et on la libère sans vitesse initiale à l'instant  $t = 0$  pris comme origine des dates . On repère la position de la tige à tout instant à l'aide de son abscisse angulaire  $\theta$  par rapport à la position d'équilibre ( Figure 1).



On étudie le mouvement du pendule dans un référentiel lié à la Terre considéré galiléen .

On considère la position d'équilibre comme référence de l'énergie potentielle de torsion et le plan horizontale passant par  $G$  comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur .

On néglige tous les frottements .

Les deux courbes (a) et (b) de la figure 2 représentent les variations de l'énergie potentielle  $E_p$  de l'oscillateur et son énergie cinétique  $E_c$  en fonction de  $\theta$  .

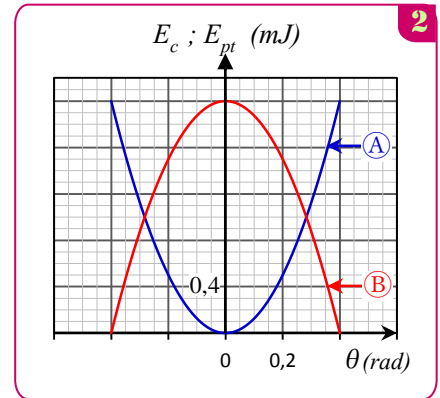
0. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation autour d'un axe fixe, déterminer que l'équation différentielle du mouvement du système étudié .

1- Relier en justifiant votre réponse chaque courbe à l'énergie correspondante .

2- Déterminer la constante de torsion  $C$  du fil métallique .

3- Trouver la valeur absolue de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}_1$  du pendule au passage par la position d'abscisse angulaire  $\theta_1 = 0,2 \text{ rad}$  .

4- Calculer le travail du moment du couple de torsion  $W(\mathcal{M}_C)$  lors du déplacement de l'oscillateur de la position d'abscisse angulaire  $\theta = 0$  à la position d'abscisse angulaire  $\theta_1$  .



**EXERCICE 2**

**20 min**

Un pendule de torsion est constitué d'un fil en acier vertical, de constante de torsion  $C$ , et d'une tige  $AB$  homogène de moment d'inertie  $J_{\Delta}$  par rapport à un axe vertical  $(D)$  confondu avec le fil et passant par le centre d'inertie  $G$  de la tige.

On écarte la tige horizontalement, dans le sens positif, d'un angle  $\theta_m = 0,8 \text{ rad}$  par rapport à sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale à un instant  $t=0$ .

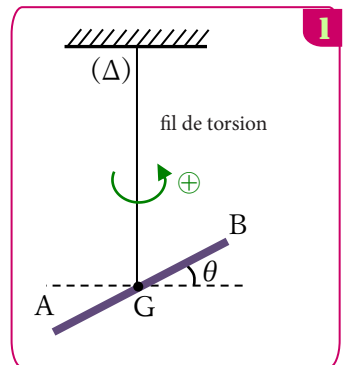
On repère la position de la tige à chaque instant par l'abscisse angulaire  $\theta$  par rapport à la position d'équilibre. (voir figure ci-contre)

On étudie le mouvement du pendule dans un référentiel terrestre considéré galiléen.

On considère la position d'équilibre du pendule comme référence de l'énergie potentielle de torsion et le plan horizontal passant par  $G$  comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur.

On néglige tout frottement.

La courbe de la figure ci-contre, représente les variations de l'énergie cinétique  $E_c$  du pendule en fonction de l'angle  $\theta$  .



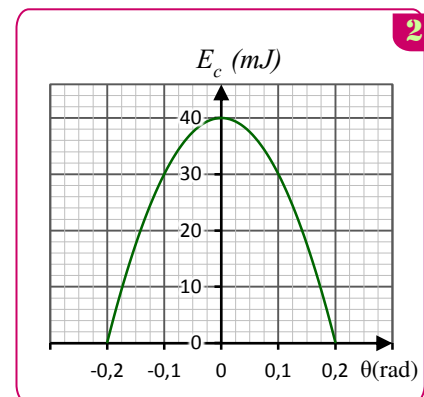
1- Écrire l'expression de l'énergie mécanique du pendule en fonction de

$C, J_{\Delta}, \theta$  et la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$

2- Déterminer la valeur de la constante de torsion  $C$  du fil en acier.

3. Sachant que la vitesse angulaire maximale est  $\dot{\theta}_{\max} = 2,31 \text{ rad.s}^{-1}$

Trouver la valeur de  $J_{\Delta}$  .



## EXERCICE 3

20 min

Le fonctionnement d'un ensemble d'appareils de mesure comme le pendule de Cavendish et le galvanomètre, est basé sur la propriété de torsion puisqu'ils contiennent des ressorts spiraux ou des fils métalliques rectilignes.

On considère un pendule de torsion composé d'un fil d'acier vertical de constante de torsion  $C$  et d'une tige homogène  $AB$  suspendu à l'extrémité libre du fil par son centre  $G$ . (figure)

On note  $J_\Delta$  le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation  $(\Delta)$  confondu avec le fil.

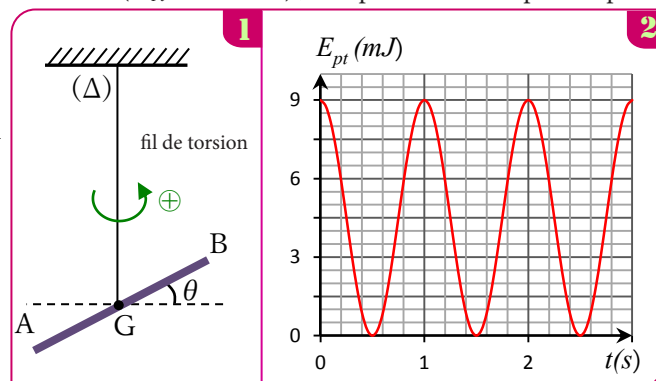
On fait tourner la tige  $AB$  autour de l'axe  $(\Delta)$  dans le sens positif d'un angle  $\theta_m$  de sa position d'équilibre, et on le libère sans vitesse initiale à l'instant pris comme origine des dates et il effectue un mouvement circulaire sinusoïdal.

On considère la position d'équilibre comme référence de l'énergie potentielle de torsion ( $E_{pt} = 0$  à  $\theta = 0$ ), et le plan horizontal passant par  $G$  comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur ( $E_{pp} = 0$ ).

**On donne :** le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation  $(\Delta)$  :  
 $J_\Delta = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$ .

La courbe de la figure 2 représente les variations de l'énergie potentielle de torsion  $E_{pt}$  en fonction du temps. En vous aidant de cette courbe ;

- Déterminer l'énergie mécanique  $E_m$  de ce pendule et la période propre.
- Déterminer la constante de torsion  $C$  du fil métallique.
- Trouver la valeur absolue de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  à l'instant  $t_1 = 0,5 \text{ s}$ .
- Calculer le travail  $W$  du couple de torsion entre les instants  $t_0 = 0$  et  $t_1$ .



## EXERCICE 4

20 min

Cet exercice a pour objectif d'étudier le mouvement d'un pendule de torsion et de déterminer quelques grandeurs liées à ce mouvement.

On dispose d'un pendule de torsion constitué d'un fil métallique, de constante de torsion  $C$  et d'une tige  $MN$  homogène fixée en son centre d'inertie  $G$  à l'une des extrémités du fil. L'autre extrémité du fil est fixée en un point  $P$  d'un support (figure 1).

La tige peut effectuer un mouvement de rotation sans frottement autour de l'axe  $(\Delta)$  confondu avec le fil métallique. Le moment d'inertie de la tige  $MN$  par rapport à cet axe est  $J_\Delta = 4 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$ .

On étudie le mouvement du pendule dans un repère lié à un référentiel terrestre supposé galiléen. On repère la position de la tige  $MN$  à chaque instant  $t$  par son abscisse angulaire  $\theta$  par rapport à sa position d'équilibre stable (figure).

On choisit la position d'équilibre stable comme référence de l'énergie potentielle de torsion ( $E_{pt} = 0$ ) et le plan horizontal passant par  $G$  comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur ( $E_{pp} = 0$ ).

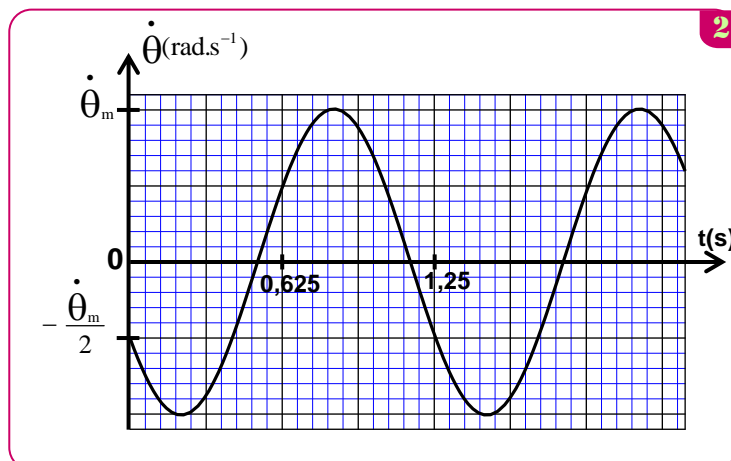
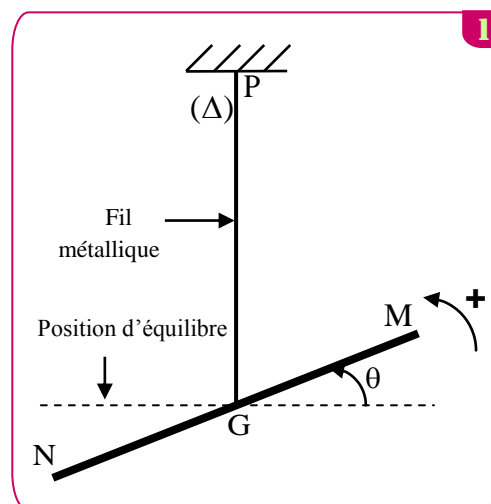
On prendra  $\pi^2 = 10$ .

Le pendule effectue des oscillations

d'amplitude  $\theta_m = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ . L'étude

expérimentale a permis d'obtenir la courbe de la figure 2 représentant les variations de la vitesse angulaire de l'oscillateur en fonction du temps.

- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation, établir l'équation différentielle du mouvement du pendule.



2 La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme :  $\theta(t) = \theta_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$  où  $T_0$  est la période propre du pendule.

a. Montrer que l'expression numérique de la vitesse angulaire, exprimée en  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , s'écrit :

$$\dot{\theta}(t) = 4 \cdot \sin\left(1,6\pi t + \frac{7\pi}{6}\right).$$

b. Déterminer la valeur de la constante de torsion  $C$  du fil

3 Trouver la valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur et en déduire la valeur de son énergie potentielle à l'origine des dates  $t=0$ .

**EXERCICE 5**

**35 min**

Le pendule de torsion représenté sur la figure 1 est constitué d'un fil de torsion de constante de torsion  $C_0$  et de longueur  $\ell$ , et d'une tige homogène AB.

On fixe la tige AB par son milieu au fil de torsion en un point O

qui divise le fil en deux parties :

- Une partie OM de longueur  $z$  et de constante de torsion  $C_1$ ;
- Une partie ON de longueur  $\ell-z$  et de constante de torsion  $C_2$ .

Lorsque le fil est tordu d'un angle  $\theta$ , la partie OM exerce sur la tige un couple de torsion de moment  $M_1 = -C_1\theta$ , et la partie ON exerce sur la tige un couple de torsion de moment  $M_2 = -C_2\theta$ .

On exprime la constante de torsion  $C$  d'un fil de torsion

de longueur  $L$  par la relation  $C = \frac{k}{L}$  avec  $k$  une constante qui

dépend du matériau constituant le fil de torsion et du diamètre de ce fil.

$J_\Delta$  représente le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation  $(\Delta)$  confondu avec le fil de torsion

Au début le fil de torsion est non tordu et la tige AB est horizontale.

On fait tourner la tige AB autour de l'axe  $(\Delta)$  d'un angle  $\theta_m$  de sa position d'équilibre stable et on l'abandonne sans vitesse initiale, elle effectue alors des oscillations dans le plan horizontal.

On repère la position de la tige AB à une date  $t$  par l'abscisse angulaire  $\theta$  que fait la tige à cet instant avec la droite horizontale confondu avec la position d'équilibre de la tige.

On néglige tous les frottements.

1 En appliquant la relation fondamentale de la dynamique relative à la rotation, montrer que l'équation différentielle du mouvement de ce pendule s'écrit :  $\ddot{\theta} + \frac{C_0 \cdot \ell^2}{J_\Delta \cdot z \cdot (\ell - z)} \cdot \theta = 0$ .

2 Trouver l'expression littérale de la période propre  $T_0$  de l'oscillateur pour que la solution de l'équation différentielle soit :  $\theta = \theta_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0}\right)$ .

La courbe de la figure 2 représente la variation de

l'accélération angulaire de la tige en fonction de

l'abscisse angulaire  $\theta$  dans le cas où  $z = \frac{\ell}{2}$ .

3 Déterminer la valeur de  $T_0$  dans ce cas.

4 On choisit le plan horizontal qui contient la tige AB comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur et on choisit comme état de référence de l'énergie potentielle de torsion la position d'équilibre de la tige où  $\theta=0$ .

a- Déterminer dans le cas où  $z = \frac{\ell}{2}$ , l'expression

de l'énergie mécanique  $E_m$  de l'oscillateur à un instant  $t$  en fonction de  $J_\Delta$ ,  $C_0$ ,  $\theta$  et la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  de la tige AB.

b- Sachant que  $E_m = 4 \cdot 10^{-3}$  J, Calculer  $C_0$ . On prend  $\pi^2 = 10$ .

