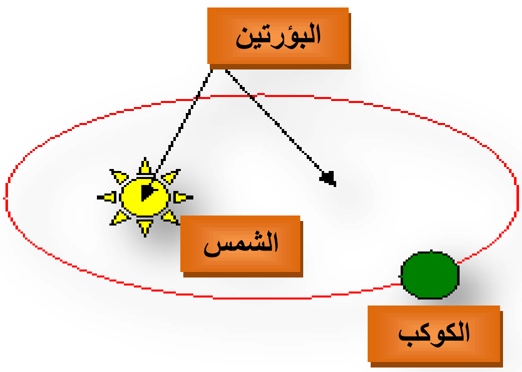
الحركات المستوية :
حركة الكواكب و الأقمار الاصطناعية

1) قوانين كيبلر .

بين 1609 و 1618 نشر كيبلر (Kepler) في كتابه أسترونوميا نوفا ثلاثة قوانين اعتبرت ثورية آنذاك ، و مكنت من وصف حركة الكواكب حول الشمس .

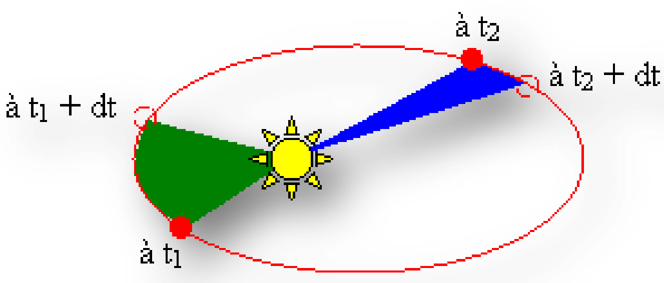
1 - 1) القانون الأول أو قانون المدارات .

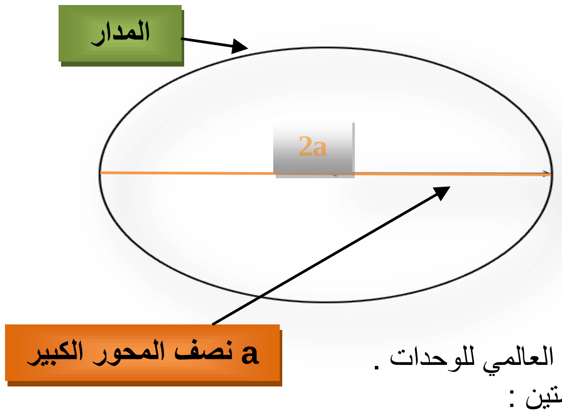
في المرجع المركزي الشمسي ، مسار مركز قصور كوكب إهليلج (ellipse) ، حيث أحد بؤرتيه هو مركز الشمس .



1 - 2) القانون الثاني أو قانون المساحات .

تكسح القطعة الرابطة بين مركز الشمس و مركز كوكب مساحات متقايسة خلال مدد متساوية .
هذا القانون يؤكد الملاحظة التي تقول بأن سرعة كوكب تكبر عند اقترابه من الشمس .





1 - 3) القانون الثالث أو قانون الأدوار .

لنعتبر T الدور المداري لكوكب (المدة الزمنية اللازمة لكي ينجز الكوكب دورة كاملة على مداره) و a طول نصف المحور الكبير لمداره .

يتناسب مربع الدور المداري T لكوكب يدور حول الشمس مع مكعب طول نصف المحور الكبير a لمداره الإهليلجي .

$$\frac{T^2}{a^3} = k$$

k ثابتة لا تتعلق بكتلة الكوكب . قيمتها معبر عنها بوحدة $s^2.m^{-3}$ في النظام العالمي للوحدات .

لنحسب k بالنسبة للأرض ثم بالنسبة للمشتري (Jupiter) و نقارن بين القيمتين :

- $T_{Terre} = 365\ jours$ و $a_{Terre} = 150.10^6\ km$
  $k_{Terre} = 4,0.10^{-20}\ [jours^2.km^{-3}]$

- $T_{Jupiter} = 4\ 332\ jours$ و $a_{Jupiter} = 780.10^6\ km$
  $k_{Jupiter} = 4,0.10^{-20}\ [jours^2.km^{-2}]$.

نجد :

$k_{Terre} = k_{Jupiter}$

بالنسبة لكواكب المجموعة الشمسية :

الكوكب	a نصف المحور الكبير ب 10^3 km أو 10^6 m	T الدور المداري باليوم	T الدور المداري ب 10^6 s	T^2/a^3 $jour^2.km^{-3}$	T^2/a^3 $s^2.m^{-3}$
Mercure عطارد	57910	87,97	7,57984708	$3,98482.10^{-11}$	$2,95842.10^{-19}$
Vénus الزهرة	108200	224,7	19,3610508	$3,98588.10^{-11}$	$2,95921.10^{-19}$
Terre الأرض	149600	365,26	31,47226264	$3,98483.10^{-11}$	$2,95843.10^{-19}$
Mars المريخ	227940	686,98	59,19294472	$3,98498.10^{-11}$	$2,95855.10^{-19}$
Jupiter المشتري	778330	4332,71	373,3236244	$3,98133.10^{-11}$	$2,95583.10^{-19}$

بالنسبة لأقمار المشتري التي لاحظها غاليلي :

القمر	a نصف المحور الكبير ب 10^3 km أو 10^6 m	T الدور المداري jour	T الدور المداري 10^6 s	T^2/a^3 $jour^2.km^{-3}$	T^2/a^3 $s^2.m^{-3}$
Io	422	1,77	0,15251028	$4,16878.10^{-8}$	$3,095.10^{-16}$
Europe	671	3,55	0,3058822	$4,17147.10^{-8}$	$3,097.10^{-16}$
Ganymède	1070	7,15	0,6160726	$4,17312.10^{-8}$	$3,09822.10^{-16}$
Callisto	1883	16,69	1,43807716	$4,17217.10^{-8}$	$3,09751.10^{-16}$

نلاحظ أن $\frac{T^2}{a^3}$ ثابتة ، لكن هذه الثابتة تتعلق بالجسم الجاذب . لدينا كما سنبين ذلك $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$ ، حيث G ثابتة التجاذب الكوني :

$G = 6,67.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ و M كتلة النجم أو الكوكب الجاذب

أخذا بعين الاعتبار نتائج الجداول السابقة ، يمكن أن نحدد كتل الكواكب أو النجوم الجاذبة . نجد مثلا :

- بالنسبة للشمس : $M_S = 2,00.10^{30}\,kg$
- بالنسبة للمشتري (Jupiter) : $M_J = 1,91.10^{27}\,kg$

قوانين كيبلر تطبق سواء على الأقمار الطبيعية أو الاصطناعية لجرم سماوي (astre) .

بالنسبة لبعض أقمار الأرض :

القمر	a نصف المحور الكبير ب 10^3 km أو 10^6 m	T الدور المداري	T الدور المداري en s	T^2/a^3 $s^2.m^{-3}$
Lune	*384*	*27,32 jours*	*$2,35.10^6$*	*$9,78632.10^{-14}$*
Hipparcos	24,546	10h37min 57s	38277	$9,9068.10^{-14}$
NOAA 15	7,19	1h41min09s	6069	$9,90941.10^{-14}$
GPS BII-01	26,5625	11h58min08s	43088	$9,90617.10^{-14}$
Globalstar MO48	7,79	1h54min4s	6844	$9,90849.10^{-14}$

*** ملحوظة : رغم أن كيبلر توصل إلى هذه القوانين اعتمادا على ملاحظات و حسابات ، فإننا اليوم يمكن أن نبرهن عليها .**

2) قوانين كيبلر في حالة مدار دائري .

يمكن اعتبار مسارات جل كواكب المنظومة الشمسية مسارات دائرية . في هذه الحالة بؤرتي الإهليلج متطابقتين :

- قانون المدارات يشير إلى كون المسار دائري مركزه هو مركز الشمس .
- قانون المساحات يشير إلى كون السرعة ثابتة : في هذه الحالة ، الكوكب له حركة دائرية منتظمة .
- قانون الأدوار يصير

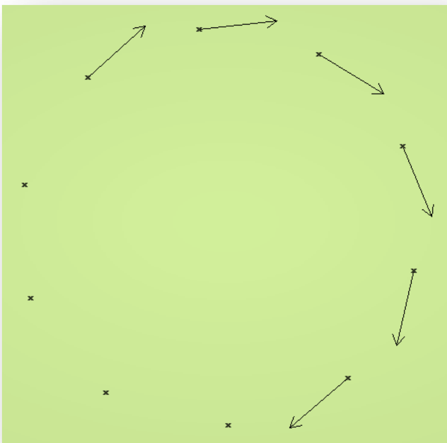
$$\frac{T^2}{r^3} = Cste$$

مع r شعاع المسار الدائري

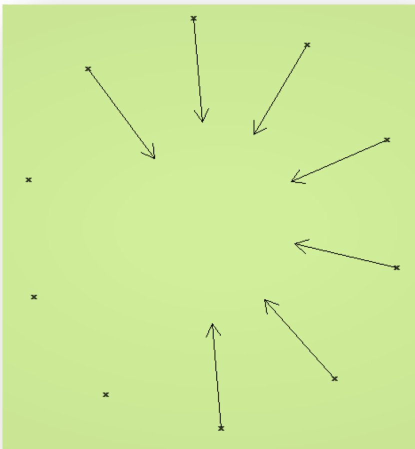
3) الحصول على حركة دائرية منتظمة .

خلال دراسة حركة الكواكب و الأقمار، نقتصر بدراسة حالة المسار الدائري فقط . كما لاحظنا في الفقرة 2 فإن قانون المساحات يشير إلى أن الحركة منتظمة في هذه الحالة .

3 - 1) مميزات الحركة الدائرية المنتظمة .



تمثيل متجهة السرعة اللحظية

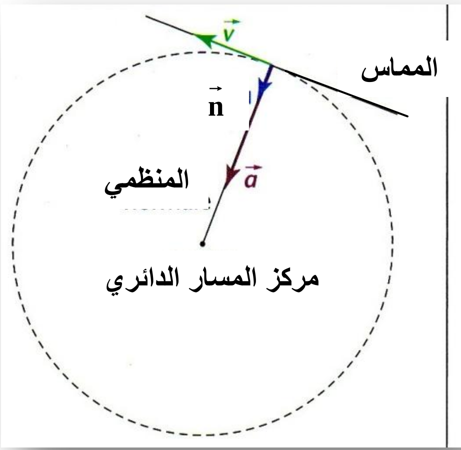


تمثيل متجهة التسارع اللحظية

- متجهة التسارع دائما متجهة نحو المركز الجاذب : نقول بأنها انجذابية مركزية .
- متجهة السرعة و متجهة التسارع دائما متجهتين متعامدتين .

خلال حركة دائرية منتظمة ، متجهة التسارع لها التعبير : $\vec{a}=\frac{v^2}{r}\vec{n}$ (الإحداثي المماسي منعدم لأن $\frac{dv}{dt}=0$)

حيث $\vec{n}$ المتجهة الواحدية المنظمية لمعلم فريني



3 - 2) الشروط الضرورية للحصول على حركة دائرية منتظمة .

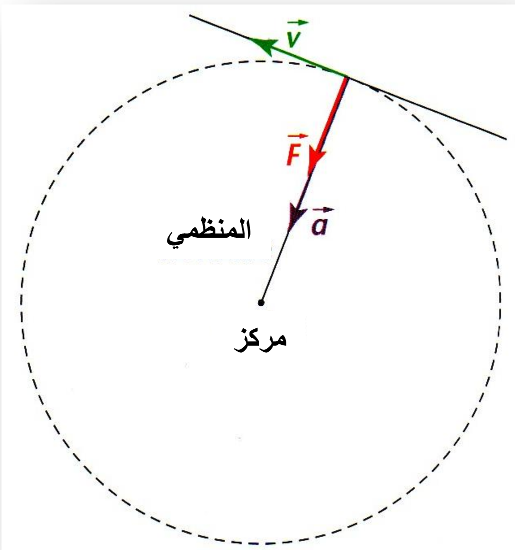
في مرجع غاليلي ، تطبيق قانون نيوتن على مركز القصور G لجسم صلب كتلته m يعطي : $\sum\overrightarrow{F_{ext}}=m\overrightarrow{a_G}$

للحصول على حركة دائرية منتظمة ، يجب أن تكون $\overrightarrow{a_G}$ انجذابية مركزية و قيمتها $\frac{v^2}{r}$ ، اذن المتجهة $\sum\overrightarrow{F_{ext}}$ التي نرمز لها اختصارا $\vec{F}$ ، يجب أن تكون هي الأخرى انجذابية مركزية و قيمتها $\frac{mv^2}{r}$

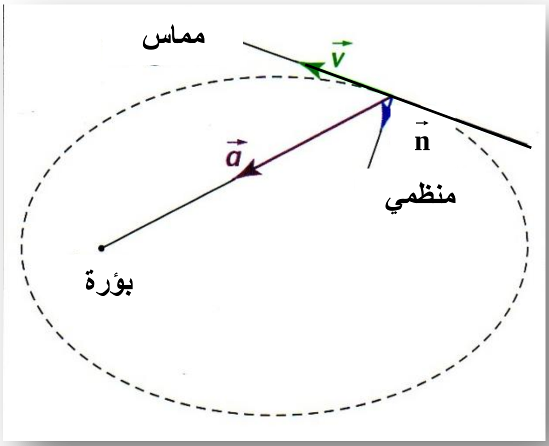
حركة مركز قصور جسم صلب كتلته m حركة دائرية منتظمة في مرجع غاليلي إذا كان :
المجموع المتجهي $\vec{F}$ للقوى المطبقة عليه متجهة انجذابية مركزية
منظم المتجهة $\vec{F}$ ثابت و يحقق العلاقة

$$F=\frac{m.v^2}{r}$$

مع r شعاع المسار الدائري

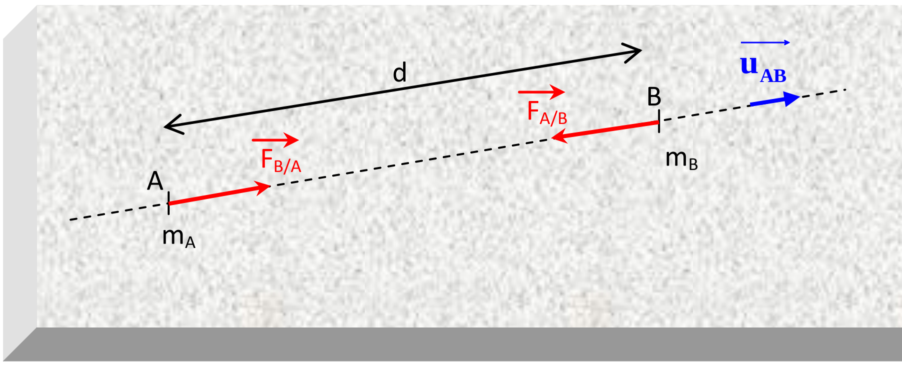


* **ملحوظة** : بواسطة برنم للمحاكات ، يمكن أن نتأكد أنه في حالة عدم تحقق العلاقة السابقة ، فإن المسار يمكن أن يكون إهليلجيا . في هذه الحالة ، متجهة التسارع دائما متجهة نحو أحد البؤرتين ، ولكن غير متعامدة مع متجهة السرعة .



4) تذكير بقانون التجاذب الكوني .

في سنة 1687 توصل نيوتن إلى قانون يمكِن من شرح حركة الكواكب و تفسير استنتاجات كيبلر ؛ إنه قانون التجاذب الكوني :
ننمدج التجاذب البيني الحاصل بين جسمين نقطيين A و B كتلتيهما بالتتابع m_A و m_B بقوتي الجذب $\overrightarrow{F_{A/B}}$ و $\overrightarrow{F_{B/A}}$ لهما المميزات التالية :



$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -G\frac{m_A m_B}{d^2}\overrightarrow{u_{AB}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$$

$$\overrightarrow{u_{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$$

* قانون التجاذب الكوني يطبق كذلك على أجسام غير نقطية في الحالتين التاليتين :
- عندما يكون توزيع الكتلة له تماثل كروي . وهي حالة النجوم و الكواكب .
- عندما تكون أبعاد الجسم مهملة مقارنة مع المسافة الفاصلة بينه و بين الجسم الجاذب . و هي حالة مثلا قمر اصطناعي للأرض في هذه الحالة نعتبر القمر الاصطناعي نقطيا .

* كما تطرقنا لذلك في درس سابق ، يمكن اعتبار قوة التجاذب التي تطبقها الأرض على جسم ما هي وزن هذا الجسم .

5) الحركة المدارية للكواكب .

تتم الدارسة في المرجع المركزي الشمسي ، الذي نعتبر ه ثابتا و غاليليا (الشمس تدور حول مركز المجرة خلال $2,26.10^8$ سنة) .

5 - 1) تطبيق القانون الثاني لنيوتن .

لنعتبر كوكبا كتلته m و مركزه P يدور حول الشمس ذات الكتلة M_S و المركز S .
الجسمين خاضعين لقوتي التجاذب الكوني ، و بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكوكب نجد :

$$\overrightarrow{F_{S/P}} = -\frac{G M_S m}{r^2}\overrightarrow{u_{SP}} = m\overrightarrow{a_P}$$

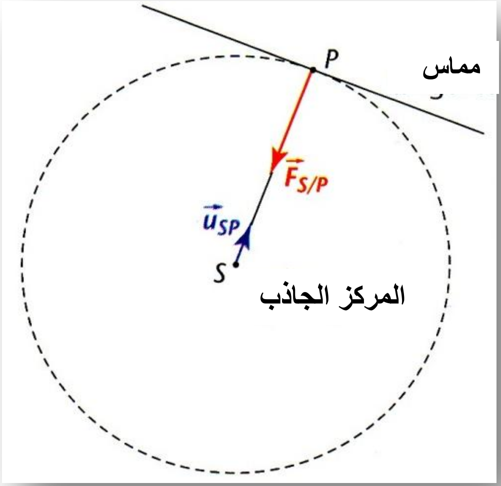
و منه نكتب :

$$\overrightarrow{a_P} = -\frac{G M_S}{r^2}\overrightarrow{u_{SP}}$$

و بذلك فإن الشرط الأول للحصول على حركة دائرية منتظمة قد تحقق : القوة $\overrightarrow{F_{S/P}}$ المطبقة على الكوكب متجهة انجذابية مركزية ، كمتجهة التسارع $\overrightarrow{a_P}$.

لكي تكون الحركة دائرية منتظمة يجب كذلك أن يكون منظم $\overrightarrow{F_{S/P}}$ ثابت و يحقق :

$$F_{S/P} = \frac{m\,v^2}{r}$$



و منه :

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G\,M_S}{r^2}$$

أي :

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_S}{r}}$$

ختاما ،
في المرجع المركزي الشمسي ، تكون لكوكب حركة دائرية منتظمة حول الشمس على دائرة شعاعها **r** إذا حققت سرعته العلاقة التالية :

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_S}{r}}$$

مع $M_S = 1,99.10^{30}\,kg$ كتلة الشمس و $G = 6,67.10^{-11}\,N.m^2.kg^{-2}$ ثابتة التجاذب الكوني .

5 - 2) تعبير الدور المداري .
بما الحركة دائرية منتظمة فهي اذن دورية ، يمثل دورها المداري المدة الزمنية الازمة لإنجاز دورة كاملة $(2\pi r)$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\,r}{\sqrt{\frac{G\,M_S}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M_S}}$$

و منه فإن :

$$T^2 = 4\pi^2\,\frac{r^3}{G\,M_S}$$

أي :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_S}$$

و بذلك فإن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ تساوي ثابتة ، لا تتعلق بالكوكب المدروس : نجد القانون الثالث لكيبلر بالنسبة لكوكب في حركة دائرية منتظمة حول الشمس .

الكوكب	T (10^7 s)	r (10^8 km)	$\frac{T^2}{r^3}$ ($s^2.m^{-3}$)
Vénus الزهرة	1,94	1,08	$2,99.10^{-19}$
Terre الأرض	3,16	1,50	$2,96.10^{-19}$
Mars المريخ	5,94	2,28	$2,98.10^{-19}$
Jupiter المشتري	37,6	7,78	$3,00.10^{-19}$

6) تطبيق : الحركة المدارية لأقمار الأرض .

في حالة أقمار الأرض ، تتم الدراسة في المرجع المركزي الأرضي .

6 - 1) تعبير السرعة و الدور المداري .

حركة القمر تكون دائرية منتظمة عندما تتوفر الشروط المذكورة في الفقرات السابقة ، و التي هي :

- القوة $\overrightarrow{F_{T/S}}$ المطبقة على القمر متجهة انجذابية مركزية : و هي قوة جذب مطبقة من طرف الأرض ذات الكتلة M_T و الشعاع R_T .
- قيمة السرعة تحقق العلاقة : $F_{T/S} = \dfrac{m v^2}{r} \Leftrightarrow a = \dfrac{v^2}{r}$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، يمكن استنتاج المميزات المدارية للأقمار .

في المرجع المركزي الأرضي ، يكون قمر في حركة دائرية منتظمة حول الأرض على دائرة شعاعها r بشرط أن تحقق سرعته العلاقة:

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{r}}$$

مع $r = R_T + h$ حيث h ارتفاع القمر عن سطح الأرض .

$R_T = 6{,}378.10^3$ عند الأقطاب ، $R_T = 6{,}356.10^3$ m عند خط الاستواء

$G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}

$M_T = 5{,}974.10^{24}$ kg

و الدور المداري هو :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G M_T}}$$

السرعة و الدور المداري لا يتعلقان بكتلة القمر ، بل فقط بارتفاعه .

لكي نضع قمرا على مداره الدائري ، يجب أن نمكنه عند ارتفاع h من سرعة متجهتها عمودية على متجهة الموضع $\overrightarrow{TS}$ و قيمتها تحقق :

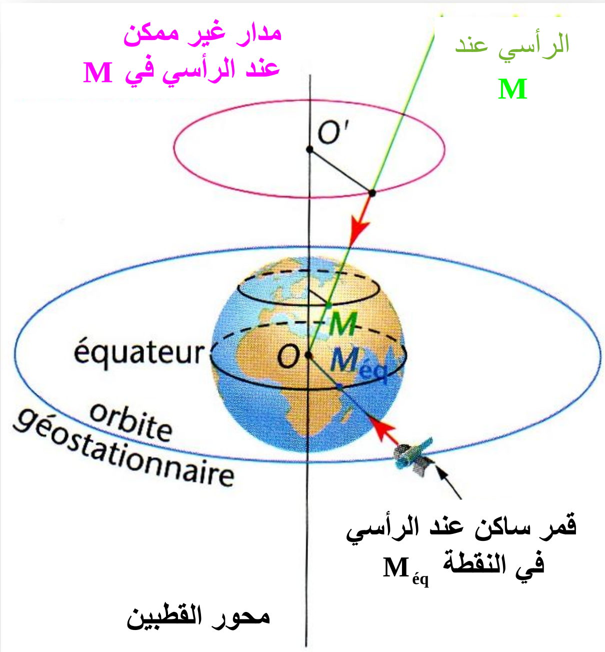
$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}}$$

6 - 2) الأقمار الساكنة .

من بين آلاف الأقمار الاصطناعية التي تدور حول الأرض ، تستعمل الأقمار الساكنة أساسا في الاتصلات .

يكون قمر ساكنا عندما يبقى على الدوام في المستقيم الرأسي لنقطة من الأرض ؛ فهو ساكن بالنسبة لملاحظ على الأرض .

لنحدد الشروط اللازمة لكي يكون قمر ساكنا .



لنعتبر نقطة **M** من سطح الأرض .
الأرض تدور حول محورها و يجب على القمر أن يبقى موجودا في الرأسي **OM** لكي يظهر ساكنا :
حركته دائرية منتظمة و لكن مركزها **O'** و اتجاهات تسارعه و $\overrightarrow{F_{T/S}}$ تمر من **O'** . بينما ، يفرض قانون التجاذب أن يكون اتجاه القوة $\overrightarrow{F_{T/S}}$ مارا من المركز **O** (مركز الأرض) : **O'** متطابق مع **O** فقط إذا كان المسار يوجد في مستوى خط الاستواء .
يجب أن يكون الدور المداري للقمر مساويا لدور دوران الأرض حول نفسها :

T = 23 h 56 min 04 s = 86 164 s

الارتفاع **h** للقمر اذن محدد بواسطة العلاقة :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}$$

و منه نجد :

$$h = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} - R_T$$

تطبيق عددي : $h = 35800 km$
يجب على القمر كذلك أن يدور في منحى دوران الأرض حول نفسها .

خلاصة

لقمر اصطناعي ساكن موضع لا يتغير بالنسبة لمعلم مرتبط بالأرض : يبقى دائما على نفس المستقيم الرأسي المار من نقطة على سطح الأرض .

- **ينبغي أن يكون مداره موجودا في مستوى خط الاستواء**
- **أن يدور في نفس منحى دوران الأرض حول محورها القطبي**
- **أن يكون دوره المداري مساويا لدور حركة دوران الأرض حول محورها القطبي :**

$$T = 23h56min4s = 86164s$$

يوجد على ارتفاع يقدر ب :

$$h = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} - R_T \approx 36000km$$

3 - 6) أقمار كواكب أخرى غير الأرض .

بنفس التعليل السابق ، في مرجع مركزي للكوكب المدروس ، لدينا :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$ مع **M** كتلة الكوكب

هذه العلاقة تمكن من تحديد كتلة كوكب إذا كان لديه قمر نعرف دور و شعاع مداره

Jupiter : 63 satellites connus dont les 4 galiléens (1610)

	Diamètre	Rayon orbital	Période	Masse
Io	3 643 km	421 800 km	1,8 j	$8,9.10^{22}$ kg
Ganymède	5 262 km	1 070 400 km	7,2 j	$1,5.10^{23}$ kg
Callisto	4 821 km	1 882 700 km	16,7 j	$1,1.10^{23}$ kg
Europe	3 122 km	671 000 km	3,6 j	$4,8.10^{22}$ kg